УДК 531.38

Дорошин А.В., Сверчков А.А.

ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СООСНЫХ ТЕЛ

Рассматривается пространственное движение относительно центра масс системы соосных тел, образованной двумя телами с трехосными эллипсоидами инерции [1]. Основной целью является построение серии фазовых сечений Пуанкаре, которые позволяют находить разнообразные неклассические регулярные решения, а также отслеживать хаотизацию отдельных фазовых траекторий и областей фазового пространства. Прикладным аспектом исследований является поиск и описание нетривиальных режимов пространственного движения вокруг центра масс космических аппаратов с двойным вращением (неуравновешенных спутников-гиростатов).

Введем системы координат (рис. 1): $OXYZ$ – исходная неподвижная система координат; $Ox_1y_1z_1$ – система координат, связанная с соосным ротором; $Ox_2y_2z_2$ – система координат, оси которой связаны с основным соосным телом-носителем.

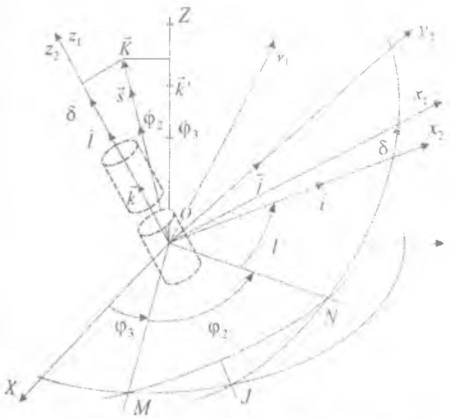

Рис. 1. Угловые параметры Андуайе-Депри

Оси Oz_1 и Oz_2 связанных систем совпадают с общей осью вращения тел. Векторы угловых скоростей тел представлены в проекциях на оси связанных координат $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$: $\vec{\omega}_1 = (p',q',r')^T$, $\vec{\omega}_2 = (p,q,r)^T$, причем проекции угловой скорости ротора выражаются через угловую скорость тела-носителя следующим образом:

$$\begin{cases} p' = p\cos\delta + q\sin\delta, \\ q' = q\cos\delta - p\sin\delta, \\ r' = r + \sigma, \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma = \dot{\delta}$.

Выражения для кинетической энергии и кинетического момента имеют следующий вид (кинетический момент представлен в проекциях на оси $Ox_2y_2z_2$):

$$T = \frac{1}{2}\left(A_1(p\cos\delta + q\sin\delta)^2 + B_1(q\cos\delta - p\sin\delta)^2 + C_1(r+\sigma)^2 + A_2p^2 + B_2q^2 + C_2r^2\right); \quad (2)$$

$$\bar{K}=\left\{p(A_1\cos^2\delta+B_1\sin^2\delta+A_2)+q(A_1-B_1)\sin\delta\cos\delta\right\}\ \bar{i}+$$
$$+\left\{p(A_1-B_1)\sin\delta\cos\delta+q(A_1\sin^2\delta+B_1\cos^2\delta+B_2)\right\}\ \bar{j}+\left\{(C_1+C_2)r+C_1\sigma\right\}\ \bar{k},\quad (3$$

где A_i, B_i, C_i – главные моменты инерции тела i ($i=1,2$). Пусть для определенност $A_1>B_1$.

Перейдем к описанию динамики системы в переменных Андуайе-Деприи [1-3]. этих переменных положение основного тела-носителя определяется тремя углами φ_1, φ_2 и l, характеризующими повороты относительно оси OZ, направления кинетическо го момента системы и оси Oz, соответственно. Выражения для обобщенных импульсо Деприи, согласно определению, запишутся следующим образом:

$$L=\frac{\partial T}{\partial \dot{l}}=\bar{K}\cdot\bar{k},\quad I_2=\partial T/\partial\dot{\varphi}_2=\bar{K}\cdot\bar{s}=K,\quad I_3=\partial T/\partial\dot{\varphi}_3=\bar{K}\cdot\bar{k}',$$

$$\Delta=\partial T/\partial\delta=C_1(r+\sigma).$$

Отметим, что обобщенные импульсы L, I_3 являются проекциями кинетическо момента системы на оси Oz_2 и OZ, а импульс I_2 равен величине вектора кинетическо момента. Выражения проекций угловых скоростей в канонических переменных Депр имеют вид:

$$p=\frac{\sqrt{I_2^2-L^2}}{S}\left[Q\sin l-(A_1-B_1)\sin\delta\cos\delta\cos l\right];$$

$$q=\frac{\sqrt{I_2^2-L^2}}{S}\left[R\cos l-(A_1-B_1)\sin\delta\cos\delta\sin l\right];$$

$$r=\frac{L-\Delta}{C_2};\qquad \sigma=\frac{\Delta}{C_1}-\frac{L-\Delta}{C_2},$$

где $S=(A_1+B_2)(B_1+A_2)\sin^2\delta+(A_1+A_2)(B_1+B_2)\cos^2\delta$,

$$Q=A_1\sin^2\delta+B_1\cos^2\delta+B_2,\quad R=A_1\cos^2\delta+B_1\sin^2\delta+A_2.$$

Введем параметр ε, характеризующий асимметрию соосного тела-ротора:

$$\varepsilon=(A_1-B_1)^2/A_1^2>0.$$

Подставляя (5) в (2), запишем гамильтониан свободной системы в переменны Андуайе-Деприи с выделением невозмущенной $\bar{H}$ (при $\varepsilon=0$) и возмущенной $\tilde{H}$ част

$$H=T=\bar{H}(l,L,I_2,\Delta)+\varepsilon\tilde{H}(l,\delta,L,I_2),$$
$$\bar{H}=\frac{1}{2}\left(I_2^2-L^2\right)\left[\frac{\sin^2 l}{(A_1+A_2)}+\frac{\cos^2 l}{(A_1+B_2)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta^2}{C_1}+\frac{(L-\Delta)^2}{C_2}\right].$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\frac{\left(I_2^2 - L^2\right)A_1^2}{S^2}\left\{A_1\left[\sin^2(\delta + l) + 4\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right)\sin^4\delta\cos^2\delta\cos^2 l\right] + \sin^2(\delta + l)\left[A_2\cos^2\delta + B_2\sin^2\delta\right]\right\},$$

где $S = (A_1 + B_2)(A_1 + A_2) - A_1\sqrt{\varepsilon}\left(A_1 + B_2\sin^2\delta + A_2\cos^2\delta\right)$.

Отметим, что выражение (7) является точным и не содержит возмущающих членов порядков малости $O(\varepsilon^2)$ и выше.

Уравнения Гамильтона для свободной системы в канонических переменных Андуайе-Депри в общем виде запишутся:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_i} + \varepsilon\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_i} - \varepsilon\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i}, \ \left(q_i = \langle l, \varphi_2, \varphi_3, \delta\rangle,\ p_i = \langle L, I_2, I_3, \Delta\rangle\right). \quad (8)$$

Для анализа динамики возмущенной системы удобно использовать отображение Пуанкаре, сопоставляющее каждой точке x_n некоторой плоскости, рассекающей многомерное фазовое пространство, ее последовательную итерацию x_{n+1}, принадлежащую той же фазовой траектории. Отображение Пуанкаре наглядно иллюстрирует разнообразные динамические эффекты, такие как рождение, гибель, а также эволюции разнообразных регулярных и хаотических режимов движения и целых областей фазового пространства. В качестве плоскости Пуанкаре выберем секущую плоскость (условие): $\delta_0 = \delta \bmod (2\pi)$, $\delta_0 = const$ (операция $a \bmod b$ означает получение остатка от деления a на b). Итерации отображения будем определять при помощи численного интегрирования уравнений движения (8), оставляя при выводе на фазовую плоскость только те точки, которые удовлетворяют условию: $\left|\delta - \delta_0 \bmod (2\pi)\right| < \mu$, где μ характеризует допустимую погрешность в выполнении условия.

В порождающем случае ($\varepsilon = 0$) из вида невозмущенной части гамильтониана (7) и динамических уравнений (8) следует, что $\overline{H} = \overline{H}(l, L)$, $I_2 = const$, $\Delta = const$. Поэтому при $\varepsilon = 0$ размерность фазового пространства системы может быть понижена до двух, и система сводится к системе с одной степенью свободы [2, 3] (с обобщенной координатой l и импульсом L), а сечение Пуанкаре (рис. 2) совпадет с классическим фазовым портретом $L(l)$.

Отметим, что на рис. 2-5 приводятся топологически эквивалентные нормированные портреты $L(l)/I_2$, причем $-1 \le L(l)/I_2 \le 1$, $0 \le l \le 2\pi$.

Ситуация меняется при нарушении динамической симметрии ротора ($\varepsilon \ne 0$). В этом случае возникают новые неклассические периодические режимы движения (рис. 3-5): на портретах появляются замкнутые траектории, нехарактерные для порождающей системы. Усложнение фазовых портретов (сечений Пуанкаре) в случае возмущенной ($\varepsilon \neq 0$) системы следует связать с такими известными динамическими эффек-тами, как увеличение размерности фазового пространства до R^4 $\{l, L, \delta, \Delta\}$, расщепле-ние сепаратрисс в областях их гомоклинического пересечения (окрестности седловы-точек) и хаотизация отдельных траекторий, при которой точки отображения Пуанкар не ложатся на регулярные кривые, а беспорядочно заполняют некоторые области фазо-вого пространства.

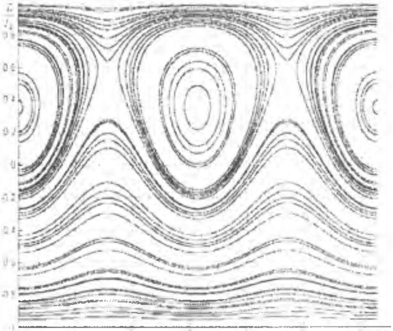

Рис. 2. Сечение Пуанкаре при $\varepsilon = 0$

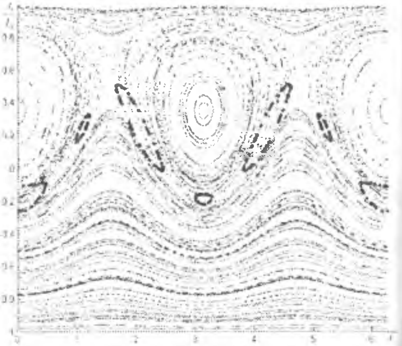

Рис. 3. Сечение Пуанкаре при $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$

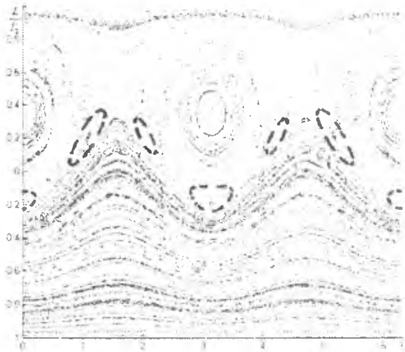

Рис. 4. Сечение Пуанкаре при $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}$

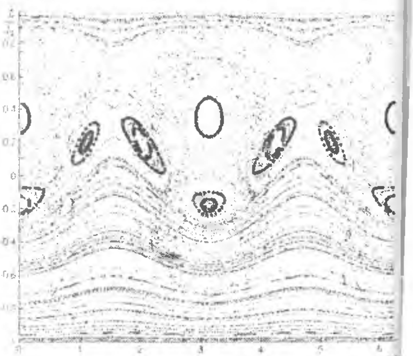

Рис. 5. Сечение Пуанкаре при $\varepsilon = 6{,}4 \cdot 10$

Библиографический список

1. Дорошин А.В., Малыхина О.И. Переменные действие–угол в задаче исследова движения соосных тел // Сборник трудов двенадцатого Всероссийского семинара управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2006. С. 56
2. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука 1977.
3. Ивин Е.А. К вопросу об интегрируемости задачи о движении по инерции свя двух твердых тел // Вестник МГУ, серия 1. Математика. Механика. 1985. № 3. С. 66.