

Заболотнов Ю.М., Еленев Д.В.

### ДВИЖЕНИЕ СВЯЗКИ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА ТРОСЕ В АТМОСФЕРЕ

При разработке проектов перспективных космических систем все большую роль начинают играть разнообразные тросовые системы, позволяющие выполнить новые операции на различных участках космического полета. В работе рассматривается построение теоретической модели пространственного движения в атмосфере системы двух твердых тел, соединенных тросом. Одно из тел (более легкое) выполняет роль аэродинамического стабилизатора для обеспечения устойчивости движения при снижении в атмосфере.

Рассматриваемые тела близки по форме к симметричным и могут иметь массово-инерционную асимметрию. На рисунке 1 изображена принципиальная схема механической системы.

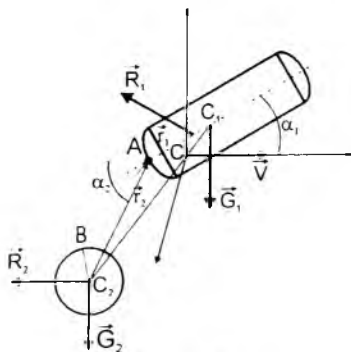


Рисунок 1

Задача движения в воздушном потоке связки двух твердых тел рассматривается при следующих основных допущениях: связь невесома и нерастяжима; гравитационный момент пренебрежимо мал.

На каждое из тел в рассматриваемой механической системе, совершающих движение в атмосфере, действуют аэродинамическая сила  $\vec{R}_{1,2}$ , аэродинамический момент  $\vec{M}_{1,2}$  и сила

натяжения троса  $N_{1,2}$ , где второй индекс относится к аэродинамическому стабилизатору.

Очевидно, что  $\bar{N}_1 = -\bar{N}_2$ .

Обозначим через  $O_i x_i y_i z_i$  ( $i = 1, 2$ ) связанные системы координат, причем точки  $O_i$  совместим с центрами масс каждого из тел  $C_i$ . Имея ввиду, что тела близки к симметричным, введем также системы координат, связанные с плоскостями  $O_i x_i y_i z_i$  пространственных углов атаки  $\alpha_{\Gamma_i}$ . Системы координат  $O_i x_i y_i z_i$  и  $O_i x_i y_{\Gamma_i} z_{\Gamma_i}$  отличаются друг от друга поворотом относительно осей  $O_i x_i$  на аэродинамические углы крена  $\varphi_{\Gamma_i}$  [1]. Направления продольных осей  $O_i x_i$  близки к осям симметрии формы каждого тела. Тогда аэродинамические силы  $\bar{R}_{1,2}$  можно разложить на три компоненты.

$$R_{ix} = c_{ix} \Phi_{i,1}, R_{iy} = c_{iy} \Phi_{i,1}, R_{iz} = c_{iz} \Phi_{i,1}, \quad (1)$$

где  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  - скоростной напор,  $S_i$  - характерные площади тел,  $\rho$  - плотность воздуха,  $V$  - величина скорости набегающего потока,  $c_{ix}, c_{iy}, c_{iz}$  - безразмерные аэродинамические коэффициенты. Если тело осесимметрично, то равнодействующая аэродинамической силы действует в плоскости пространственного угла атаки, и тогда  $c_{iz} = 0$ .

Моменты от аэродинамических сил вокруг центров масс вычисляются по формуле

$$\bar{M}_C(\bar{R}_i) = \bar{\Delta r}_i \times \bar{R}_i, \quad (2)$$

где  $\bar{\Delta r}_i$  - вектора положения центров давления относительно центров масс.

Динамические уравнения движения системы запишем, используя теорему об изменении кинетического момента для каждого тела.

$$\frac{d\bar{K}_{1,2}}{dt} = \bar{M}_{C_{1,2}}(\bar{R}_{1,2}) + \bar{M}_{C_{1,2}}(\bar{N}_{1,2}), \quad (3)$$

где  $\bar{K}_{1,2}$  - кинетический момент первого и второго тел относительно центров масс  $C_1$  и  $C_2$  соответственно;  $\bar{M}_{C_{1,2}}(\bar{N}_{1,2})$  - моменты сил реакций в шарнире, определенные относительно центра масс каждого тела.

Моменты от сил натяжения вычисляются из следующих выражений:

$$\bar{M}_{C_{1,2}}(\bar{N}_{1,2}) = \bar{r}_{1,2} \times \bar{N}_{1,2}, \quad (4)$$

где  $\vec{r}_{1,2}$  - радиус-векторы, определяющие положение точки крепления троса относительно центра масс каждого тела.

Для определения силы натяжения запишем теорему о движении центра масс первого тела и всей системы:

$$m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{N}_1 + \vec{R}_1 + \vec{G}_1, \quad (m_1 + m_2) \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{G}_1 + \vec{G}_2, \quad (5)$$

где  $\vec{G}_{1,2}$  - гравитационные силы, действующие на первое и второе тело;  $m_{1,2}$  - массы первого и второго тел;  $\vec{V}_C$  - скорость центра масс системы;  $\vec{V}_{C1}$  - скорость центра масс первого тела относительно центра масс системы;  $\vec{V}_1 = \vec{V}_C + \vec{V}_{C1}$  - скорость первого тела.

Выражая  $\vec{N}_1$  из первого уравнения системы (5) и подставляя в него второе уравнение этой системы, получим

$$\vec{N}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{G}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{G}_1 + \frac{m_1 \vec{R}_2 - m_2 \vec{R}_1}{m_1 + m_2} + m_1 \frac{d^2 \vec{r}_{1C}}{dt^2}, \quad (6)$$

где  $\vec{r}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{C}_1 \vec{C}_2$  - радиус-вектор, соединяющий центр масс системы и центр масс первого тела;  $\vec{C}_1 \vec{C}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  - радиус-вектор, соединяющий центры масс тел.

Если пренебречь изменением ускорения свободного падения  $g$  в пределах размеров системы, то  $\vec{G}_1 = m_1 \vec{g}$ ,  $\vec{G}_2 = m_2 \vec{g}$ . Тогда  $\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{G}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{G}_1 = 0$ , и формула (6) примет

окончательный вид

$$\vec{N}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{R}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{R}_1 + m_1 \vec{W}_{1C}, \quad (7)$$

где  $\vec{W}_{1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \right)$ ,  $\vec{r}_3 = \vec{B} \vec{A}$  (рисунок 1). Вектор  $\vec{r}_3$ , определяющий положение троса, в системе координат  $Bx_3 y_3 z_3$ , связанной с тросом, при натянутом тросе имеет только одну ненулевую компоненту:  $\vec{r}_3 = \{x_3, 0, 0\}$ .

Определяя производные векторов  $\vec{r}_{1,2}$  в связанных с первым и вторым телами системах координат, получим

$$\frac{d^2 \vec{r}_{1,2}}{dt^2} = \vec{\omega}_{1,2} \times \vec{r}_{1,2} + \vec{\omega}_{1,2} \times (\vec{\omega}_{1,2} \times \vec{r}_{1,2}), \quad (8)$$

где  $\bar{\omega}_{1,2}$  - угловые скорости первого и второго тел.

Таким образом

$$\bar{N}_i = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{R}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{R}_1 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left( \frac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} + \frac{d^2 \bar{r}_3}{dt^2} \right), \quad (9)$$

$$\text{где } \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \dot{\bar{\omega}}_i \times \bar{r}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}_i), \quad i = \overline{1,3}.$$

Поскольку сила натяжения троса направлена вдоль троса, то

$$N_{y_1} = 0, \quad N_{z_3} = 0. \quad (10)$$

$$\text{Обозначим } \bar{E} = \dot{\bar{\omega}}_1 \times \bar{r}_1, \quad \bar{D} = \dot{\bar{\omega}}_2 \times \bar{r}_2, \quad \bar{F} = \dot{\bar{\omega}}_3 \times \bar{r}_3. \quad (11)$$

С учетом этих обозначений уравнения (10) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \{\bar{r}_3 \times \bar{R}_2\}_{y_3} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \{\bar{r}_3 \times \bar{R}_1\}_{y_3} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \{\bar{r}_3 \times (\bar{D} - \bar{E} + \bar{F})\}_{y_3} &= 0, \\ \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \{\bar{r}_3 \times \bar{R}_2\}_{z_3} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \{\bar{r}_3 \times \bar{R}_1\}_{z_3} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \{\bar{r}_3 \times (\bar{D} - \bar{E} + \bar{F})\}_{z_3} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) фактически представляют собой уравнения механической связи между телами. Объединяя уравнения связи (12) с уравнениями (3), получаем систему динамических уравнений для рассматриваемой механической системы.

$$A \cdot \bar{\omega} = B, \quad (13)$$

где  $A = [A_{ij}]$  - матрица коэффициентов размерностью  $8 \times 8$ ,

$\bar{\omega} = [\dot{\omega}_{x_1}, \dot{\omega}_{y_1}, \dot{\omega}_{z_1}, \dot{\omega}_{x_2}, \dot{\omega}_{y_2}, \dot{\omega}_{z_2}, \dot{\omega}_{x_3}, \dot{\omega}_{y_3}]^T$  - обобщенный вектор угловых скоростей,

$B = [B_j]$  - матрица-вектор свободных членов размерностью  $8 \times 1$ .

Как показал вывод уравнений, матрица  $A$  является симметричной.

Полученные динамические уравнения (13) необходимо дополнить кинематическими уравнениями, например, уравнениями Эйлера для первого, второго и третьего тел, и уравнениями движения центра масс, которые записываются в традиционной форме [2], [3].

Особенностью полученной модели является то, что при ее численной реализации необходимо на каждом шаге численного интегрирования обращать матрицу  $A$ , что усложняет моделирование.

Для частного плоского случая движения связки двух тел на тросе был проведен анализ устойчивости движения механической системы в атмосфере. Исследовалась устойчивость положения системы, когда  $\alpha_{10} = 0$ , то есть связка располагается по скорости набегающего

потока. Показано, что в этом случае анализ устойчивости сводится к анализу корней многочлена третьей степени. Когда тела близки к сферам, условие устойчивости принимает наиболее простой вид

$$m_2 R_1 - m_1 R_2 < 0, \quad (14)$$

где  $R_{1,2}$  - модули сил аэродинамического сопротивления сфер.

Численные расчеты показывают, что условие (14) обеспечивает ограниченные колебания относительно положения равновесия как в плоском, так и в пространственном случаях движения для симметричных тел, а также натяжение троса во время движения в атмосфере. Условие (14) аналогично условию статической устойчивости для классической задачи движения одного твердого тела в атмосфере.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. // ГОСТ 20058-80, 1981.
- 2 Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г., Ярошевский В.А. Маневрирование космических аппаратов, М.: Машиностроение, 1970.
- 3 Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1974