УДК 536

Коптев А.П., Богатырев А.В.

ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРТНЕРОВ ПРИ ТОРГЕ

Главной задачей подрядных торгов по выполнению работ и оказанию услуг для государственных нужд является организация взаимодействия в рамках системы заказчик – исполнитель, где каждый элемент этой системы является активным. При этом решение задачи осуществляется в рамках игры за общий конечный путь, определяемый договором на поставку товары для государственных нужд.

Под игрой будем понимать в данном случае алгоритм принятия решений в условиях *конфликта* и *неопределенности* (неопределенности относительно мотивов и ходов партнера). Каждый из двух игроков стремится при заданных ограничениях максимизировать свою "прибыль" и/или минимизировать свои "потери". В работе поставлена задача описать и сформулировать на языке динамики теорию игр для двух активных систем или лиц, принимающих решения.

Среди игр двух лиц необходимо различать игры, в которых интересы участников диаметрально противоположны (игры с постоянной или нулевой суммой), и игры, в которых интересы участников частично противоположны, а частично совпадают (игры с непостоянной суммой).

В играх с непостоянной суммой у участников в общем случае имеются общие совпадающие интересы и противоположные игры. Такие игры иногда называют играми со смешанными мотивами. Для игр с непостоянной суммой можно доказать существование положений равновесия, но уже невозможно предписывать "оптимальные" стратегии в терминах этих положений равновесия, так как выбор каждым игроком стратегий, содержащих положения равновесия, еще не гарантирует равновесного исхода игры. Поэтому в играх с непостоянной суммой не существует оптимальных стратегий (решений, которые гарантировали бы устойчивость выбранной пары стратегий в том смысле, что одностороннее или даже двустороннее отклонение от нее только ухудшают положение игрока). В таких играх понятие *рациональной* стратегии требует уточнения и обобщения. Оказывается, что ходы, предписываемые соображениями индивидуальной рациональности, могут существенно отличаться от ходов, выбираемых из соображений коллективной рациональности. "Парадоксы" возникают когда понятия "рационального решения", адекватные на одном уровне конфликта, переносятся на другой уровень. Таким образом, в случае игр двух лиц с непостоянной суммой понятие рациональной стратегии как бы претерпевает бифуркацию на индивидуальную и коллективную рациональную стратегию, причем весьма часто они не совпадают, и возникает понятие *торга* как средства достижения субоптимального решения. Игры с непостоянной суммой могут быть разделены на две подкатегории:

а) игры с непостоянной суммой и торгом;

б) парадоксальные игры с непостоянной суммой.

Рассмотрим первую игру на примере.

		A_2 (II)	B_2
(I)	A_1	2 \ 1	3 \ 8
	B_1	4 \ 4	0 \ 0

Рисунок 1 – Матрица 2 × 2 игры с непостоянной суммой ("с переговорами")

Пусть матрица игры с непостоянной суммой, т.е. с переговорами, имеет вид, представленный на рисунке 1.

Следуя [1], отметим, что в такой игре оптимальной чистой стратегии нет ни одного игрока. Посмотрим, как обстоит дело в случае смешанных стратегий.

Рассмотрим вопрос построения смешанной стратегии.

Пусть на начальном этапе исключим вопрос о выигрыше противника. Тогда каждый игрок может выбрать смешанную стратегию, которая гарантирует ему минимальный выигрыш независимо от того, какую стратегию выберет его противник. Существует много алгоритмов, позволяющих найти такую смешанную стратегию. Но предположим, что смешанная стратегия для игрока I определяется путем вычисления разности платежей для каждой строки для первой строки такая разность равна 3 − 2 = 1, для второй строки – (4 − 0 = 4), обращения полученных значений и случайного четырехкратного выбора A1 при каждом выборе B1. Аналогично игрок II приписывает стратегии A2 вероятность 8/11 и стратегии B2 вероятность 3/11.

Игрок I, приписывая стратегии A_1 вероятность 4/5 и стратегии B_1 вероятность 1/5, гарантирует себе выигрыш

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4}(2+3)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(4+0)=\frac{12}{5}$$

(в предположении о полном неведении – с вероятностями (1/2, 1/2) – относительно вероятностей выбора игроком II стратегий A_2, B_2).

Аналогично игрок II гарантирует себе выигрыш

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{11}(1+4)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11}(8+0)=\frac{32}{11}.$$

На первый взгляд кажется, что эту пару смешанных стратегий (гарантирующих каждому игроку "прожиточный минимум") можно принять за "решение" игры. Однако это решение неудовлетворительно: оба игрока могли бы выиграть больше указанных выше гарантированных минимумов, если бы, например, игрок I выбрал стратегию B_1, а игрок II – стратегию A_2. Для того, чтобы получить более крупные выигрыши, игрокам необходимо координировать свои стратегии. Разумеется, проблема выработки соглашения о выборе той или иной стратегии (или смешанной стратегии) остается, так как при выборе пары стратегий (B_1, A_2) преимущество получает игрок I, а при выборе пары стратегий (A_1, B_2) – игрок II. Но относительно какой-либо из этих двух пар (или смешанной стратегии) игроки ни пришли к соглашению, любая из них обеспечивает каждому игроку выигрыш, превышающий гарантированный уровень, соответственно в 12/5 и 32/11.

Неспособность координировать стратегии в данном случае надлежит отнести на счет отсутствия связи между двумя партнерами. Предположим, что игроки каким-то образом договорились о выборе пары стратегий (A_1, B_2) (или (B_1, A_2)). Тогда ни у одного из игроков не было бы мотива для нарушения соглашения, так как выбор игроком другой стратегии (в то время как его противник придерживается достигнутого соглашения) уменьшил бы выигрыш "нарушителя". Таким образом, каждая из двух приведенных выше пар стратегий представляет собой равновесие: ни один из двух игроков не может повысить свой выигрыш (и, вообще говоря, лишь уменьшит его), если отойдет от равновесия, в то время как другой игрок будет по-прежнему придерживаться соглашения (принцип *минимакса*: одностороннее отклонение наказывается).

Но если в рассматриваемой игре обстоятельства позволяют установить связь между игроками и координировать стратегии, то ситуация меняется: в этом случае игроки могут путем торгов (переговоров) согласиться относительно пары стратегий, дающих преимущества каждому из них. В игре с постоянной суммой такое невозможно, так как в ней чем лучше исход для одного игрока, тем он хуже для другого. В игре с непостоянной суммой могут существовать исходы, предпочтительные для обоих игроков по сравнению с другими возможными исходами.

Итак, математическая задача состоит в том, чтобы на кривой возможных исходов переговоров (множестве "предмет торга") найти одну точку, которую можно было бы определить как рациональное решение, или рациональное решение конфликта (рисунок 2).

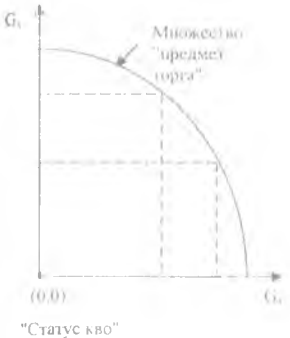

Рисунок 2 Множество исходов переговоров

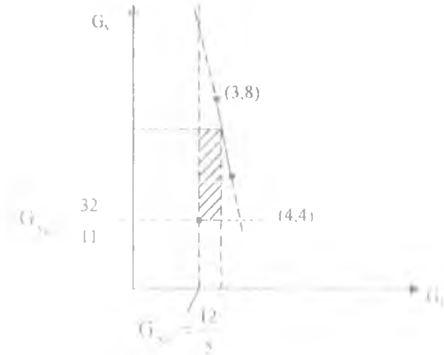

Рисунок 3 Множество исходов переговоров для конкретной игры с матрицей, изображенной на рис.1

Можно доказать, что точка множества "предмет торга", совпадающая с вершиной прямоугольника наибольшей площади, является решением задачи при двух условиях: во-первых, множество "предмет торга" заранее задано и, во-вторых, противоположная вершина прямоугольника "статус-кво" – также заранее задана.

В общем случае отнюдь не очевидно, какой должна быть в различных играх точка "статус-кво". Например, можно было бы считать, что точка "статус-кво" должна указывать выигрыш, который может гарантировать себе каждый игрок (независимо от стратегии другого игрока). Выше показано, что в рассмотренной формуле координаты такой точки, соответственно, равны $G_{x_0} = 12/5$, $G_{y_0} = 32/11$. Приняв эту точку за точку "статус-кво", вычислим оптимальные выигрыши в предположении, что множество "предмет торга" – прямолинейный отрезок от точки (3,8) до точки (4,4) (рисунок 3), поскольку игроки действительно могут выбрать размеры выигрышей в указанных пределах.

При этих условиях оптимальную точку (G_x^*, G_y^*) можно вычислить из соотношения

$$F = (G_x^* - G_{x_0})(G_y^* - G_{y_0}) = \max. \qquad (1)$$

Из выражения для прямой, проходящей через точки (3,8) и (4,4), следует:

$$G_y = 20 - 4G_x \qquad (2)$$

Поскольку $G_{x_0} = 12/5$, $G_{y_0} = 32/11$, то

$$(G_x^* - \frac{12}{5})\,(20 - 4G_x^* - \frac{32}{11}) = \max.$$

Из условия

$$\frac{\partial F}{\partial G_x} = 0$$

получим

$$20 - 4G_x^* - \frac{32}{11} - 4(G_x^* - \frac{12}{5}) = 0 \qquad (3)$$

Из (3) и (2) определим

$$G_x^* \approx 3{,}34; \quad G_y^* \approx 6{,}65.$$

В общем случае предполагается, что для определения точки "статус-кво" каждый из игроков независимо от другого выбирает (чистую или смешанную) "стратегию угрозы". Имеется в виду, что, если игрокам не удается достичь согласия, пара выбранных таким образом стратегий *x*, *y* определяет точку "статус-кво". Если же согласие достижимо, т. е. если точка на множестве "предмет торга" может быть определена, то она находится в согласии с решением описанной выше игры с переговорами, а пара стратегических угроз задаст точку "статус-кво".

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Rapoport A. Two-Person Theory, The Essential Ideas, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1966.