

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА С ТРИГАРМОНИЧЕСКОЙ МОМЕНТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ

Рассматривается плоское движение неуправляемого осесимметричного спускаемого аппарата относительно центра масс на верхнем участке траектории спуска в атмосферу, когда можно пренебречь изменением скорости центра масс, угла наклона траектории, гравитационным моментом и аэродинамическим демпфированием. Исследуются случаи, когда в процессе спуска происходит изменение характера движения: вращательное движение переходит в колебательное, колебательное движение «скачкообразно» переходит в колебательное движение с другими амплитудными характеристиками. В [1-3] рассматриваются переходные режимы движения спускаемых аппаратов с синусоидальной и бигармонической моментными характеристиками. В данной работе рассматривается движение относительно центра масс спускаемого аппарата с зависимостью восстанавливающего момента от угла атаки, имеющей вид тригармонического ряда. Такая зависимость характерна для аппаратов сложной геометрической формы, например, типа «Викинг».

Наряду с тем, как наличие второй гармоники в моментной характеристике обуславливает возможность появления одного дополнительного положения равновесия спускаемого аппарата по углу атаки на отрезке $[0, \pi]$ по сравнению со случаем синусоидальной зависимости, добавление третьей гармоники в моментной характеристике может приводить к появлению двух дополнительных положений равновесия, что значительно разнообразит возможные виды фазовых портретов системы.

Плоское движение спускаемого аппарата с тригармонической моментной характеристикой относительно центра масс при указанных выше допущениях описывается следующим уравнением [2], [3]:

$$\ddot{\alpha} + a(z)\sin \alpha + b(z)\sin 2\alpha + c(z)\sin 3\alpha = 0, \quad (1)$$

где α – угол атаки, $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ – коэффициенты моментной характеристики, z – медленно меняющийся параметр, переменность которого связана с медленным изменением плотности атмосферы в процессе спуска.

Коэффициенты уравнения движения (1), если зависимость плотности атмосферы от высоты полета аппроксимировать экспонентой, могут быть представлены в виде [3]:

$$a = a_0 z, \quad b = b_0 z, \quad c = c_0 z,$$

$$a_0 = -m_a S l \rho_{(0)} \frac{V_0^2}{2A}, \quad b_0 = -m_b S l \rho_{(0)} \frac{V_0^2}{2A}, \quad c_0 = -m_c S l \rho_{(0)} \frac{V_0^2}{2A}, \quad z = e^{\beta t}, \quad \beta = \lambda V_0 |\sin \theta_0|,$$

где m_a, m_b, m_c – постоянные коэффициенты, S – характерная площадь, l – характерный размер, ρ_0 – плотность атмосферы в начальный момент времени $t = t_0$, A – поперечный момент инерции аппарата, V_0 – скорость полёта, λ – логарифмический градиент плотности атмосферы по высоте, θ_0 – угол наклона траектории.

Для выяснения общих свойств движения системы (1) используется метод фазовой плоскости. Интеграл энергии системы в случае невозмущённого движения, когда коэффициенты a, b, c постоянны ($z = \text{const}$), имеет вид:

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - f(\alpha) = h$$

где

$$f(\alpha) = (a-c)\cos\alpha + b\cos^2\alpha + \frac{4}{3}c\cos^3\alpha \quad (2)$$

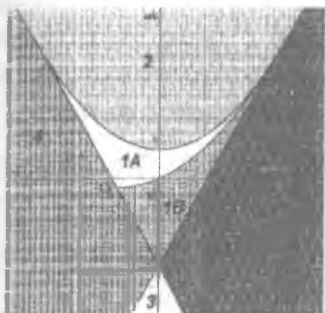
Экстремальные значения функции $f(\alpha)$ соответствуют состояниям равновесия уравнения (1), т. е. особым точкам на фазовой плоскости. Из выражения (2) следует, что в зависимости от значения параметров a, b, c могут существовать две, три, четыре особые точки на отрезке $[0, \pi]$:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi, \quad \cos \alpha_3 = \frac{-b-m}{4c}, \quad \cos \alpha_4 = \frac{-b+m}{4c},$$

$$\text{где } m = \sqrt{b^2 - 4ac + c^2}.$$

На рис. 1 изображена плоскость для определения числа особых точек и их характера в зависимости от соотношений коэффициентов, которая разбивается на пять областей следующими границами: $\frac{a}{c} = \frac{2b}{c} - 3$, $\frac{a}{c} = -\frac{2b}{c} - 3$, $\frac{a}{c} = \frac{b^2}{4c^2} + 1$. В зависимости от знака коэффициента c и номера области показано, какие положения равновесия являются устойчивыми, а какие неустойчивыми. В областях 2 и 3 имеется две особые точки фазового портрета 0 и π , что аналогично случаю физического маятника. В областях 4 и 5 имеется три особые точки на отрезке $[0, \pi]$, что аналогично случаю бигармонической зависимости моментной характеристики. В области 1 имеется четыре особы

точки: две точки типа центр и две типа седло.

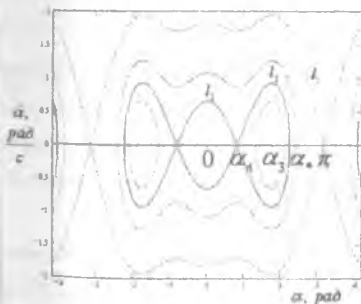


№ области	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = \pi$	α_3	α_4
$c < 0$				
1	Седло	Центр	Центр	Седло
2	Седло	Центр	-	-
3	Центр	Седло	-	-
4	Центр	Центр	-	Седло
5	Седло	Седло	Центр	-
$c > 0$				
1	Центр	Седло	Центр	Седло
2	Центр	Седло	-	-
3	Седло	Центр	-	-
4	Седло	Седло	Центр	-
5	Центр	Центр	-	Седло

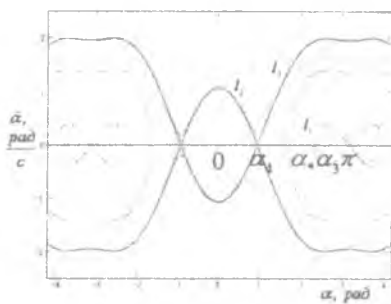
Рис. 1. Плоскость определения числа и типа особых точек фазового портрета

Особое внимание уделим области 1, как области, отличающейся по количеству особых точек от случаев, когда на аппарат действует синусоидальный или бигармонический восстанавливающий момент. Рассмотрим случай когда коэффициент $c > 0$, и при этом положение равновесия $\alpha = 0$ является устойчивым. Область 1 разбивается на две области 1А и 1В границей $\frac{\omega}{c} = \frac{3b^2}{16c^2} + \frac{b}{2c}$. На фазовом портрете, соответствующем

области 1А (рис. 2а), имеется пять областей движения: вращательная, внешняя колебательная, в которой содержится три внутренних колебательных области. В области 1В (рис. 2б) также имеется пять областей движения: вращательная, две внешних колебательных и в одной из внешних содержится две внутренних. На границе областей 1А и 1В на фазовом портрете имеется четыре области движения: одна вращательная и три колебательных.



а) Область 1А



б) Область 1В

Рис. 2. Фазовые портреты

В связи с изменением коэффициентов $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ в процессе движения про-

исходит эволюция фазовых траекторий, в результате которой они могут пересекать сепаратрисы, попадая в различные области фазового портрета, что сопровождается качественным изменением характера движения. На рис. 3 приведён один из возможных вариантов изменения угла атаки во время снижения. Спускаемый аппарат, совершающий вращение, в некоторый момент времени t_1 начинает совершать колебательные движения относительно устойчивого положения равновесия $\alpha = 0$, охватывая при этом два неустойчивых положения равновесия $\alpha = \pm\alpha_4$ и два устойчивых положения равновесия $\alpha = \pm\alpha_3$, а затем в следующий момент времени t_2 начинает совершать колебания относительно устойчивого положения равновесия $\alpha = -\alpha_3$.

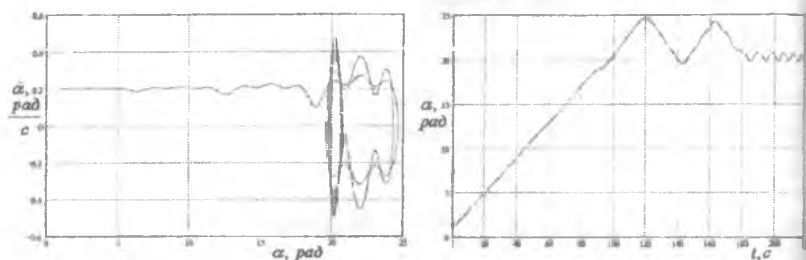


Рис. 3. Характер изменения углового движения во время спуска

В работе анализ переходных режимов движения проводится аналогично [3]. В основу анализа положены аналитические выражения для интеграла действия $I = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \dot{\alpha} d\alpha$ (α_{\min} и α_{\max} – минимальное и максимальное амплитудные значения угла атаки), который для данной системы является адиабатическим инвариантом, так как $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ – медленно меняющиеся параметры. Моменты времени, соответствующие переходам между различными областями фазового портрета, определяются из равенства интеграла действия, вычисленного вдоль сепаратрисы, интегралу действия, вычисленному по начальным условиям. В случае, когда возникнет задача выбора области продолжения движения, вычисляется вероятность попадания в соответствующую область.

Время перехода из вращения в колебание t_1 и время перехода из внешней колебательной области во внутреннюю t_2 определяется по формулам (индексами А и вверху обозначены области):

$$I_1^A = \frac{\ln \frac{I_0^2}{c_0 I_1^2}}{\beta}, \quad I_2^A = \frac{\ln \frac{I_0^2}{c_0 (I_2 + 2I_3)^2}}{\beta}, \quad I_3^A = \frac{\ln \frac{I_0^2}{c_0 (I_2 + I_3)^2}}{\beta}, \quad I_4^A = \frac{\ln \frac{I_0^2}{4I_1^2}}{\beta},$$

где I_0 – значение интеграла действия, вычисленного по начальным условиям; I_1 – интеграл действия, взятый вдоль сепаратрисы l_1 , проходящей через $\alpha = \pi$, I_2, I_3 – интегралы действия, взятые соответственно вдоль сепаратрис l_2, l_3 , проходящих через $\alpha = \alpha_4$. В случае, когда коэффициенты a_0, b_0, c_0 малы по сравнению с угловой скоростью в начальный момент времени, интеграл действия I_0 вычисляется по формуле: $I_0 = 2\pi \dot{\alpha}_0$.

Вероятности попадания в колебания относительно различных положений равновесия: $\alpha = 0, \alpha = \pm\alpha_3, \alpha = \pi$ определяются следующим образом:

$$P_0^A = \frac{I_2}{I_2 + 2I_3}, \quad P_0^B = \frac{I_3}{I_2 + I_3}, \quad P_{2\alpha_3}^A = \frac{I_3}{I_2 + 2I_3}, \quad P_{2\alpha_3}^B = \frac{I_3}{I_2 + I_3}, \quad P_{2\alpha_3}^C = \frac{1}{2}.$$

Найдены формулы для интегралов действия, взятых вдоль сепаратрис, выраженные через элементарные функции и эллиптические интегралы первого и второго рода.

Введём дополнительные коэффициенты:

$$f = \sqrt{16c^2 + 48ac}, \quad d^{A,B} = \sqrt{49b^2 \mp 24bc \pm 48ac}.$$

Интеграл действия, взятый вдоль сепаратрисы l_1 , для области 1А:

$$I_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{8(f + 8c - 6b)\sqrt{9c^2 - 6bc + 3ac}}{3\sqrt{3c}(f + 16c)} + \frac{\sqrt{f(3b + 4c)}}{3\sqrt{3c}} E(\varphi_1, k_1) + \frac{\sqrt{f}(f - 4c - 3b)}{6\sqrt{3c}} F(\varphi_1, k_1),$$

$$\text{где } \varphi_1 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{16c}{f}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{f + 3b + 4c}{2f}}.$$

Интеграл действия, взятый вдоль сепаратрисы l_1 , для области 1В при $a > -\frac{c}{3}$:

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{(4c - 3b)\sqrt{(12c - 3b)^2 - d^2}}{24c\sqrt{3c}} + \frac{\sqrt{4c + 3b + d}(4c + 3b)}{6c\sqrt{3}} (E(k_1) - E(\varphi_1, k_1)) + \frac{-d\sqrt{(4c + 3b + d)}}{6c\sqrt{3}} (K(k_1) - F(\varphi_1, k_1)),$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{4c+3b+d}{16c}}$, $k_1 = \sqrt{\frac{4c+3b-d}{4c+3b+d}}$, $\cos \alpha = \frac{-3b+4c+d}{8c}$.

Интеграл действия, взятый вдоль сепаратрисы l_1 , для области 1В при $a < -\frac{c}{3}$:

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{(12c-3b-d)(4c-9b+d)}}{3\sqrt{3c(12c-3b+d)}} + \frac{\sqrt{2d(3b+4c)}}{6c\sqrt{3}} (E(k_1) - E(\varphi_1, k_1)) - \frac{\sqrt{2d(3b+4c+d)}}{12c\sqrt{3}} (K(k_1) - F(\varphi_1, k_1)),$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{2d}{d-3b+12c}}$, $k_1 = \sqrt{\frac{d-3b-4c}{2d}}$, $\cos \alpha = \frac{-3b+4c-d}{8c}$.

Интегралы действия для области 1А, взятые вдоль сепаратрис l_2 и l_3 :

$$I_2 = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 (F(\varphi_2, k_2) - K(k_2)) + 2q_3 (E(\varphi_2, k_2) - E(k_2))$$

$$I_3 = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \dot{\alpha} d\alpha = q_1 + q_2 F(\varphi_2, k_2) + q_3 E(\varphi_2, k_2)$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{24mc}{(4c+b+2m)(4c-b+m)}}$, $k_1 = \sqrt{\frac{4c+b+2m}{8c}}$, $\cos \alpha = \frac{-b-2m}{4c}$,

$$q_1 = \frac{(4c+3b)\sqrt{2m(4c-m+b)}}{6c\sqrt{(4c-b+m)}}, \quad q_2 = \frac{16c^2+3b^2-6m^2-16bc+4mc+3bm}{12c\sqrt{3c}}, \quad q_3 = \frac{8b-2m}{3\sqrt{3c}}.$$

Интегралы действия, взятые вдоль сепаратрис l_2 и l_3 , для области 1В:

$$I_2 = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 (F(\varphi_2, k_2) - K(k_2)) + 2q_3 (E(\varphi_2, k_2) - E(k_2))$$

$$I_3 = \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_1} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 F(\varphi_2, k_2) + 2q_3 E(\varphi_2, k_2)$$

где $\varphi_2 = \arcsin \sqrt{\frac{(4c+b+2m)(4c-b+m)}{24mc}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{8c}{4c+b+2m}}$

$$q_1 = \frac{(m+2b)\sqrt{2(4c-m+b)(m+4c-b)}}{9c\sqrt{m}}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{b+2m+4c}(b+2m-4c)}{3\sqrt{6c}}$$

$$q_3 = \frac{(4b-m)\sqrt{b+2m+4c}}{3\sqrt{bc}}$$

Таким образом, проведено исследование переходных режимов движения спускаемого аппарата с тригармонической моментной характеристикой. Найдены аналитические формулы для интегралов действия, взятых вдоль сепаратрис, выраженные через элементарные функции и эллиптические интегралы первого и второго рода, на основе которых определены моменты времени, соответствующие переходам между различными областями фазового портрета системы. Для случаев движения, когда при пересечении сепаратрисы фазовая точка может попадать в различные колебательные области, найдены формулы для определения вероятности захвата в ту или иную область.

Библиографический список

1. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу [Текст]/ Г.Е. Кузмак – М.: Наука, 1970.
2. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере [Текст]/ В.А. Ярошевский – М.: Машиностроение, 1978.
3. Асланов В.С. Переходные режимы углового движения КА на верхнем участке траектории спуска [Текст]/ В.С. Асланов, И.А. Тимбай // Космические исследования. – 2001. – Т. 35. – № 3. – С. 279-286.