

## ИТЕРАЦИОННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ

Межпланетные перелеты космического аппарата (КА) с малой тягой (МТ) являются сложными динамическими маневрами, которые в соответствии с теорией сфер действия разбиваются на участки движения в гравитационных полях планет и Солнца. Описывается такое движение системами обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом воздействия тех или иных возмущающих факторов.

Введем в рассмотрение:

- $\bar{x}(t)$  – вектор фазовых координат КА, который подчиняется граничным условиям, определяемым целью перелета и возможными ограничениями,  $\bar{x}(t) \in X$ , где  $X$  – множество допустимых фазовых координат;
- $\bar{u}(t)$  – вектор функций управлений, на компоненты этих функций могут быть наложены ограничения, связанные с конструктивными особенностями КА, так что  $\bar{u}(t) \in \mathcal{U}$ , где  $\mathcal{U}$  – множество допустимых управлений;
- $\bar{b}$  – вектор баллистических параметров (оптимальная дата старта  $D_0$ , длительность перелета  $T$  и его отдельных участков  $T_i$ , последовательность гравитационных маневров), ограниченный для конкретной миссии  $\bar{b} \in \mathcal{B}$ .

Используем следующую формулировку задачи оптимизации: определить вектор функций управления  $\bar{u}(t) \in \mathcal{U}$  и вектор баллистических параметров перелета  $\bar{b} \in \mathcal{B}$ , доставляющие максимум массы полезного груза  $M_{пг}$  при заданных стартовой массе  $M_0$ , проектных параметрах КА и длительности миссии  $T$  и обеспечивающие выполнение целевой задачи проекта:

$$M_{пг} = \min_{\bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{b} \in \mathcal{B}} M_{пг} (M_0 = \text{fixe}, T = \text{fixe}, \bar{x} \in X, \bar{u}, \bar{b}). \quad (1)$$

Задача баллистической оптимизации перелета может решаться с различной степенью точности. Естественно, чем точнее решение, тем больших затрат на свое осуществление оно требует. На рис. 1 представлена классификация моделей движения КА, использующихся для оптимизации межпланетных перелетов КА.

Выделена группа наиболее простых моделей, для которых известно аналитическое решение. К этой группе относятся модели, приближенно описывающие отдельные участки движения КА под действием простых, заранее известных управлений.

Другая группа моделей движения, обеспечивающих более точное описание перелетов, требует решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Часть моделей этого уровня используют разделение траектории на участки движения в сфере действия одного притягивающего центра, другая группа наиболее сложных моделей использует описание движения в рамках задач трех и более гравитирующих тел.

При описании околопланетных участков движения, уточнение модели достигается за счет учета нецентральности гравитационного поля притягивающего тела, влияния его атмосферы, притяжения спутников планеты и Солнца и других возмущающих ускорений. На оптимальные программы управления влияют способы изменения направления тяги, условия освещенности КА, прохождение радиационных поясов и другие факторы.

Гелиоцентрическое движение КА уточняется за счет учета эллиптичности и некомпланарности орбит планет, влияния солнечной радиации и температуры на эффективность работы энергодвигательной установки, ограничений на законы управления двигательной установкой (ДУ).



Рис. 1. Классификация моделей движения, использующихся для баллистической оптимизации межпланетных перелетов

В результате анализа особенностей целей миссии, движения и проектного облика КА необходимо определить последовательность усложняющихся (и уточняющихся) моделей управляемого движения КА, обладающую следующими свойствами:

- должна быть известна точность результатов, полученных при оптимизации по  $n$ -ой модели, и эти результаты должны иметь самостоятельную ценность;

- переход к более сложной и точной модели должен осуществляться наиболее простым способом (обычно добавляется одна фазовая координата или ограничение);
- результаты, полученные на  $n$ -ой модели, должны использоваться в качестве начального приближения для  $n+1$ -ой модели;
- должны быть согласованы точности моделей, описывающих планетоцентрическое и гелиоцентрическое движение и процедуры стыковки этих участков;
- должен быть установлен критерий, при выполнении которого наращивание точности моделей прекращается.

Определяющими для баллистической оптимизации являются гелиоцентрические участки движения КА. Для их расчета предлагается использовать следующую последовательность усложняющихся моделей.

Модель М 1. Компланарное движение по спиральной траектории без учета изменения массы КА, направление ускорения от тяги двигателей постоянно.

Модель М 2. Оптимальное по быстродействию компланарное движение без учета изменения массы КА.

Модель М 3. Оптимальное по быстродействию компланарное движение КА с учетом расхода рабочего тела.

Модель М 4. Оптимальное по расходу рабочего тела компланарное движение КА с заданной длительностью маневра.

Модель М 5. Оптимальное по расходу рабочего тела некомпланарное движение КА с заданной длительностью маневра.

Решения, полученные для этой последовательности моделей является методической основой для информационно-вычислительной системы (ИВС), предназначенной для комплексной оптимизации межпланетных миссий. Разработанная ИВС основывается на базе данных, которая автоматически заполняется результатами решений, полученными в рамках различных моделей проектного облика и движения КА.

Работа ИВС начинается с описания целей и ограничений на баллистическую схему перелета  $X^n$ , задании критерия оптимальности и выборе последовательности моделей проектного облика и движения КА. Включенные в ИВС процедуры поиска позволяют в рамках выбранной  $n$ -ой модели найти в базе данных решение, наиболее близкое к требуемому. Если такое решение не найдено, то система понижает уровень сложности модели и поиск повторяется. При понижении сложности до первого уровня перелет оптимизируется с использованием приближенно аналитических зависимостей. Результаты этого решения в дальнейшем используются в качестве начального приближения при уточнении решения.

При работе над оптимизацией конкретного перелета база данных автоматически расширяется за счет включения в нее решений, полученных в процессах «перемещений» в пространстве баллистических параметров и усложнении моделей. При достаточном количестве решений, полученных для данной модели, возможно получение или уточнение аппроксимационных зависимостей, связывающих критерий оптимальности и начальные приближения для решения задач управления и вектор проектно-баллистических параметров. В процессе предусмотренных коррекций базы данных происходит удаление лишних, слишком близких друг к другу решений.

Рассмотрим, в качестве примера, процедуру «движения» по последовательности моделей для оптимизации маневра формирования круговой гелиоцентрической орбиты, с радиусом  $r_0^* = 0.5$  а.е., наклоном к плоскости эклиптики  $i_0^* = 10^\circ$  и долготой восходящего узла  $\Omega_0^* = 0^\circ$  при помощи КА с электроракетной ДУ малой тяги с солнечным источником энергии. Стартовая масса КА на выходе из сферы действия Земли равна 2400 кг, тяга двигателей 1 Н, скорость истечения рабочего тела 26 км/с.

В рамках предлагаемой методики модель М 1 использовалась в качестве начального приближения для построения решения вариационных задач. В этой модели мощность энергоснабжения обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца, двигатель работает без выключения, скорость истечения настолько большая, что расходом рабочего тела можно пренебречь по сравнению с массой КА. Ускорение от тяги двигателей  $a$  и вектор скорости  $V$  имеют постоянное направление относительно радиус-вектора (образуют углы  $\lambda$  и  $\alpha$ , соответственно). Использование таких допущений позволяет получить частное аналитическое решение задачи оптимизации, соответствующее движению КА по логарифмической спирали [1]:

$$r = r_0 e^{c\varphi} \quad \frac{V}{V_0} = c \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

где  $r, \varphi$  — безразмерные полярные координаты точки;  $V, V_0$  — радиальная и тангенциальная составляющие безразмерного вектора скорости;  $r_0 = 1$  — безразмерный радиус начальной орбиты. Аналитическое решение (2) существует, если углы  $\alpha$  и  $\lambda$  удовлетворяют уравнению связи:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \sin \alpha &= a_0 \sin \lambda \\ 2 \cdot \cos^2 \alpha &= 1 + a_0 \cos \lambda \end{aligned} \quad (3)$$

При заданном начальном уровне безразмерного ускорения  $a_0$  длительность перелетов по таким траекториям изменяется в зависимости от выбранного угла  $\lambda$  согласно зависимости

$$T = \frac{2(r_k^* - r_0^*)}{3 \cos \alpha \sqrt{1 - a_0} \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin \alpha}} \quad (4)$$

На рис. 2 показаны зависимости длительности перелетов от выбранного угла направления ускорения  $\lambda$  с безразмерным ускорением  $a_0 = 0.3$  и различными радиусами конечных орбит 0.387, 0.5, 0.723, 1.524 (средние радиусы орбит Меркурия,  $r_k^*$ , Венеры и Марса).

При использовании результатов, полученных на этой модели, необходимо учитывать, что на спиральной траектории составляющие вектора скорости точки должны удовлетворять уравнению связи (2) (в том числе начальные и конечные условия). Если эти условия выполняются, то данная модель дает точные результаты. Физически это соответствует наличию гиперболического избытка скорости в начальный и конечный моменты времени (по сравнению с движением по круговым орбитам), направление которого удовлетворяет (2). Длительность маневра можно уточнить, добавляя к нему время, необходимое для набора и гашения этих избытков скорости. Однако можно этого и не делать, т.к. использование более точных моделей последовательно автоматически «уточнит» решение.

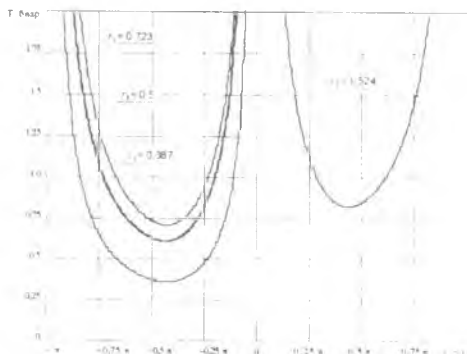


Рис. 2. Зависимость длительности перелетов с  $a_0 = 0.3$  в зависимости от угла направления ускорения

Для определения оптимального закона изменения угла управления  $\lambda_{opt}(t)$  требуется перейти к вариационной задаче об оптимальных по быстродействию перелетах между круговыми компланарными орбитами, т.е. к модели М 2. Допущения относительно расхода рабочего тела и изменения мощности энергоустановки остаются теми же, что и в первой модели. Вектора начальной и конечной скорости КА не должны обязательно удовлетворять соотношению (2). Движение КА описывается системой дифференциальных уравнений движения в плоской полярной системе координат.

В соответствии с формализмом принципа максимума Понтрягина вводится вектор фазовых координат КА  $\bar{x}^2 = (r, \varphi, V_r, V_\varphi)^T$ , сопряженных переменных  $\bar{P}^2 = (P_r, P_\varphi, P_{V_r}, P_{V_\varphi})^T$  и определяется оптимальное направление вектора ускорения:

$$\sin \lambda_{opt} = \frac{P_{V_\varphi}}{\sqrt{P_{V_\varphi}^2 + P_{V_r}^2}}, \quad \cos \lambda_{opt} = \frac{P_{V_r}}{\sqrt{P_{V_\varphi}^2 + P_{V_r}^2}} \quad (5)$$

Так как текущая угловая дальность не входит в правые части уравнений движения, то при нефиксированной угловой дальности, согласно условию трансверсальности,  $P_\varphi(t) = 0$ . Задача об оптимальном по быстродействию перелете между круговыми компланарными орбитами сводится к следующей двухточечной двухпараметрической краевой задаче. Требуется найти такие начальные значения  $\lambda_0 = \arctg(P_{V_r}/P_{V_\varphi})$  и  $B = \sqrt{P_{V_r}(t_0)^2 + P_{V_\varphi}(t_0)^2}$  ( $P_r = \pm 1$  — из условия нормировки), чтобы на концах траектории выполнялись начальное и конечное условия:

$$\bar{x}(t_0) = (r_0 = 1, \varphi_0 = 0, V_{r0} = 0, V_{\varphi 0} = 1)^T, \quad \bar{x}(T) = \left( r_k, \varphi_k, V_{rk} = 0, V_{\varphi k} = \frac{1}{\sqrt{r_k}} \right)^T \quad (6)$$

В результате решения этой задачи получены программы изменения угла управления  $\lambda_{opt}(t)$  от начального

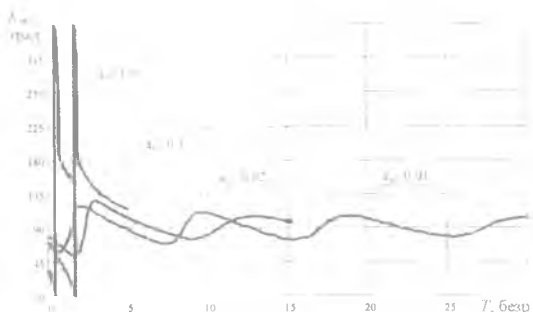


Рис. 3. Оптимальные программы управления для  $r_k = 1.524$  с различными уровнями безразмерного ускорения

уровня безразмерного ускорения  $a_0$ , показанные на рис. 3.

При небольших начальных ускорениях:  $a_0 \leq 0.02$  оптимальный угол управления  $\lambda_{opt}(t)$  колеблется относительно угла лета относительно угла управления, полученного аналитически в рамках модели М 1 с периодом, приблизительно равным одному витку орбиты. С уменьшением ускорения амплитуда этих колебаний уменьшается. Для больших уровней ускорения программа оптимального по быстродействию управления существенно отличается от полученного частного аналитического решения. Изменение угла управления в этом случае близко к классическому импульсному решению для двигателей большой тяги, траектория движения перестает носить спиральный характер (рис. 4).

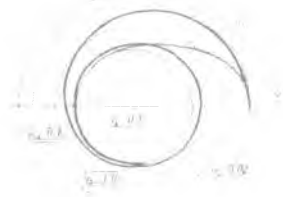
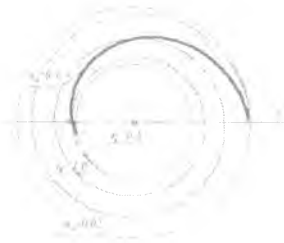


Рис. 4. а) Траектории перелета,  $r_k = 0.5$   
 $a_0 = 0.1$ ,  $a_0 = 0.02$  (модель М 1)

б) Траектория перелета,  $r_k = 0.5$ ,  $a_0 = 1$   
 $a_0 = 0.1$ ,  $a_0 = 0.02$  (модель М 2)

Сравнивая результаты, полученные в рамках первой и второй моделей движения, можно утверждать, что при  $a_0 \leq 0.02$  длительности перелета и траектории движения близки. Начальный и конечный участки траектории у первой и второй задачи отличаются из-за разницы в начальных и конечных условиях по составляющим скоростей, т.к. во второй модели снято ограничение (2) на направление вектора скорости. Результаты частного аналитического решения были использованы в качестве начального приближения для решения краевой задачи с граничными условиями (6), соответствующими  $r_k^*$ . Для оптимизации траекторий с большими уровнями ускорения использовалась процедура спуска по параметру  $a_0$ , что позволило получить множество решений краевой задачи для диапазонов радиусов конечных орбит  $r_k \in [0.1, 5]$  и начальных уровней ускорения  $a_0 \in [0.001, 5]$  и построить аппроксимационный двойник – модель А 2.

Для учета влияния изменения массы КА на оптимальное управление и траектории движения вводится модель М 3. В рамках этой модели рассматривается оптимальный по быстродействию перелет между круговыми компланарными орбитами КА с двигателем МТ и конечной скоростью истечения рабочего тела. Вектор фазовых координат для этой задачи расширяется за счет введения переменной  $m$  – относительного расхода рабочего тела:  $x^3 = (r, \varphi, V_r, V_{\varphi}, m)^T$ . Уравнения движения дополняются дифференциальным уравнением изменения относительного расхода рабочего тела

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a_0 \delta}{cr^2} \quad (7)$$

где  $\delta$  – функция включения-выключения двигателей. Соответственно изменяются вектор сопряженных множителей  $\bar{P} = (P_r, P_{\varphi}, P_{V_r}, P_{V_{\varphi}}, P_m)^T$  и Гамильтониан.

Относительная масса израсходованного рабочего тела в начальный момент времени равна нулю, а в конечный момент времени не фиксирована (для задачи на быстродействие), т.е. к граничным условиям (6) добавляются условия:

$$m(t_0) = 0; \quad m(T) \text{ — не фиксирована,} \quad P_m(T) = 0. \quad (8)$$

Формулы (5) для определения оптимального угла управления  $\lambda_{opt}(t)$  при этом не изменяются, а функция включения-выключения двигателей  $\delta$  определяется из условия максимума Гамильтониана:

$$\delta = \begin{cases} 0, & \Delta < 0 \\ 1, & \Delta > 0 \end{cases}, \quad \text{где } \Delta = \frac{P_m}{c} + \frac{\sqrt{P_{V_1}^2 + P_{V_2}^2}}{1-m}, \quad (9)$$

Так как  $P_m(t) \geq 0$  при всех  $t \in [t_0, T]$ , то для этой задачи  $\delta = 1$ .

Порядок краевой задачи увеличится до трех — подбираются начальные значения  $\lambda_0, B, P_m(t_0)$  так, чтобы выполнялись граничные условия (6), (8). В качестве начальных значений сопряженных переменных используются величины, полученные на основе известного решения по второй модели. Переход от М 2 к М 3 осуществляется введением сопряженного множителя  $P_m$ , начальное значение которого при  $c \rightarrow \infty$  равно нулю. Затем решение задачи оптимизации уточняется для некоторого достаточно большого значения  $c$  (использовалось  $c = 10000$  км/с) и осуществляется спуск по параметру  $c$  от этого значения до требуемого:  $c^* = 26$  км/с.

На рис. 5 показаны зависимости расхода рабочего тела и длительности перелета в зависимости от скорости истечения для различных начальных уровней реактивного ускорения  $a_0$  и перелета с  $r_i = 0.5$ . При достаточно больших скоростях истечения рабочего тела, погрешность вычисления длительности перелета, связанная с изменением массы КА, составляет от 5 до 15 процентов, однако структура оптимального управления и вид соответствующей траектории практически не изменяются (рис. 6).

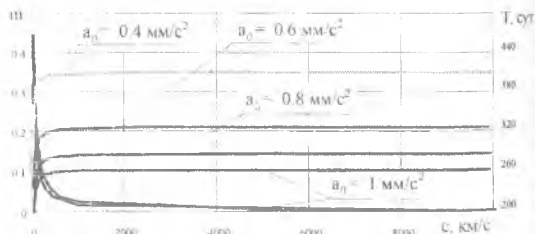
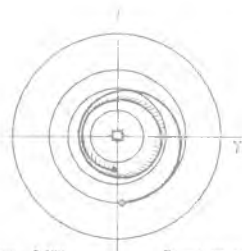


Рис. 5. Зависимость относительного расхода рабочего тела и минимальной длительности перелета от скорости истечения

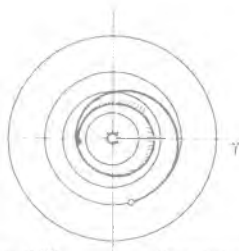




Тск. масса, тонн 2,400  
Ускорение, мм/с<sup>2</sup> 1,667

Время перелета, сут. 389,17  
Тел. радиус, млн км 74,82

Тск. масса, тонн 1,298  
Ускорение, мм/с<sup>2</sup> 3,982



Время перелета, сут. 331,62  
Тел. радиус, млн км 74,82

а)  $c = 10000$  км/с,

б)  $c = 26$  км/с

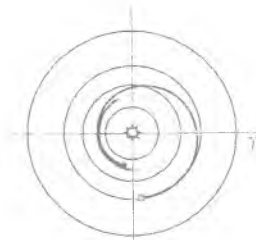
Рис. 6. Влияние скорости истечения на оптимальную траекторию движения  
( $\gamma_k = 0.5$  а.е.,  $a_0 = 0.4$  мм/с<sup>2</sup>)

Для расчета траекторий фиксированной длительности и учета влияния увеличения длительности на расход рабочего тела вводится модель М 4. В рамках этой модели осуществляется переход от задачи на оптимальное быстродействие к задаче на минимальный расход рабочего тела при фиксированной длительности перелета. Уравнения для фазовых и сопряженных координат и Гамильтониан такой задачи совпадает с уравнениями для модели М 3, но граничные условия для расхода рабочего тела и соответствующего сопряженного множителя (8) изменяются и принимают вид:

$$m(t_0) = 0, \quad m(T) \rightarrow \min, \quad P_m(T) < 0. \quad (10)$$

Для сопряженного множителя  $P_m(t)$  удобно использовать нормировку:  $P_m(t_0) = -1$ .

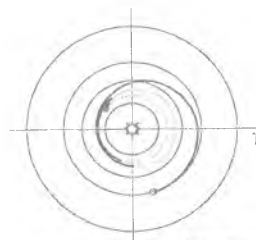
Оптимальное управление определяется (5, 9), порядок краевой задачи не изменяется, выход из интегрирования осуществляется по длительности перелета  $T$ . Используя решения, полученные на модели М 3, в качестве начального приближения для модели М 4 и выполняя соответствующий пересчет сопряженных множителей, получили множество оптимальных по расходу рабочего тела траекторий движения. На рис. 7, а показана траектория с теми же граничными условиями, что на рис. 6, б, но с фиксированной длительностью  $T=370$  сут. На рис. 7, б показана оптимальная траектория с длительностью перелета  $T=460$  сут. Влияние длительности перелета носит традиционный характер: расход рабочего тела уменьшается при ее увеличении.



Тек. масса, тонн: 1,498  
Ускорение, мм/с<sup>2</sup>: 2,670

Время перелета, сут: 370,00  
Гор. радиус, млн.км: 74,82

Тек. масса, тонн: 1,499  
Ускорение, мм/с<sup>2</sup>: 2,668



Время перелета, сут: 460,00  
Гор. радиус, млн.км: 74,82

а) длительность  $T = 370$  сут

б) длительность  $T = 460$  сут

Рис. 7. Изменение оптимальной траектории при увеличении длительности перелета

Для учета некомпланарности движения используется модель М 5. Поскольку большинство тел Солнечной системы движутся вблизи плоскости эклиптики, обычно такой переход незначительно увеличивает расход рабочего тела на осуществление перелета, однако законы оптимального управления и соответствующие им траектории движения требуют существенного уточнения.

В рамках этой модели вектор фазовых координат расширяется за счет введения переменных, описывающих положение плоскости орбиты – наклонение  $i$  и долготу восходящего узла  $\Omega$ .  $\bar{X}^5 = (r, \varphi, V_r, V_\varphi, m, i, \Omega)^T$ . Движение КА описывается в комбинированной системе координат [2]. Оптимальное управление, для этой модели определяется зависимостями

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \arcsin \left( \frac{P_{V_\varphi}}{\sqrt{P_{V_r}^2 + P_{V_\varphi}^2}} \right), \quad \lambda_2 = \arcsin \left( \frac{\cos \varphi \cdot \sin i \cdot P_r - \cos i \cdot \sin \varphi \cdot P_\varphi + \sin \varphi \cdot P_\Omega}{D} \right), \\ \delta &= \begin{cases} 0, & \Delta < 0 \\ 1, & \Delta > 0 \end{cases}, \quad \text{где } \Delta = \frac{P_m \cdot V_\varphi \cdot \sin i}{c} + \frac{D}{1-m}, \\ D &= \sqrt{(\cos \varphi \cdot \sin i \cdot P_r - \cos i \cdot \sin \varphi \cdot P_\varphi + \sin \varphi \cdot P_\Omega)^2 + \sin^2 i \cdot V_\varphi^2 (P_{V_r}^2 + P_{V_\varphi}^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Условие трансверсальности, соответствующее задаче на минимальный расход (10), сохраняется. Вариационная задача об оптимальных некомпланарных гелиоцентрических перелетах сводится к двухточечной шестипараметрической краевой задаче. В качестве начального приближения для их решения использовались результаты оптимизации в рамках модели М 4 для начальных значений сопряженных множителей:

$$P_\varphi(t_0) = 0, \quad P_i(t_0) = 0, \quad P_\Omega(t_0) = 0. \quad (12)$$

На рис. 8 показана программа оптимального управления, а на рис. 9 – соответствующая ему траектория движения (проекции на плоскость эклиптики и полярную плоскость).

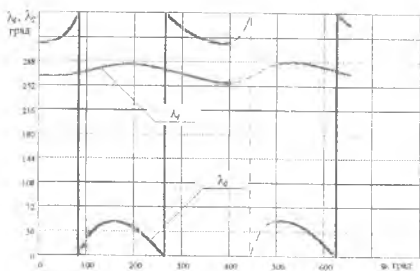
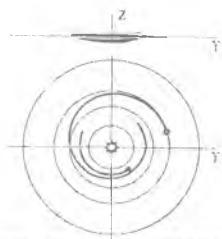


Рис. 8. Программа оптимального управления для некомпланарного перелета



Тек. масса, тонн 1.414  
Ускорение, м/с<sup>2</sup> 2.829  
Время перелета, сут 370.00  
Гелио радиус, млн км 74.92

Рис. 9. Проекция оптимальной некомпланарной траектории на плоскости эклиптики и полярную

В таблице 1 приведены баллистические параметры перелета, соответствующие оптимальной траектории движения, при переходе от модели М 1 к модели М 5.

Таблица 1 – Изменение баллистических параметров при «движении» по последовательности моделей.

Модель движения	Длительность перелета, сут	Угловая дальность, град	Расход рабочего тела, кг	Конечная масса, кг
М 1. Плоская задача, не выполнены ограничения по скорости, не учитывается расход рабочего тела	179.20	279.68	0	2400.0
М 2. Плоская задача, не учитывается расход рабочего тела	389.17	704.62	0	2400.0
М 3. Плоская задача, длительность перелета минимальна	331.62	605.34	1102.0	1298.0
М 4. Плоский перелет заданной длительности	370.00	683.89	900.5	1499.5
М 5. Все граничные условия выполнены	370.00	655.09	1062.0	1338.0

Предлагаемая методика итерационной оптимизации может быть использована для выбора оптимальных проектных параметров космических аппаратов, предназначенных для тех или иных баллистических маневров с двигателями малой тяги. Изменение цели миссии не сказывается на схеме решения, а лишь требует соответствующего выбора последовательности моделей.

#### Библиографический список

1. Старинова О.Л. Оптимальное по быстродействию движение между круговыми компланарными орбитами // Известия Самарского научного центра РАН – 2005. Т.7, №1, С. 92 - 99.
2. Салмин В.В., Старинова О.Л. Оптимизация межпланетных перелетов КА с двигателями малой тяги с учетом эллиптичности и некомпланарности орбит планет // Космические исследования - 2001. Т.39, №1, С. 51-59.