УДК 629.78

И.В.Белоконов, В.А.Бязин, В.И.Рублев, Ю.М.Усталов

# К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КА, ОБУСЛОВЛЕННОЙ НЕТОЧНОСТЬЮ ЗНАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Важным этапом решения задачи навигации космического аппарата является прогнозирование движения его центра масс. При этом точность прогнозирования оказывает весьма существенное влияние на точность решения задачи навигации в целом. Применение спутниковых систем радионавигации позволяет производить высокоточное оценивание параметров движения центра масс космического аппарата (КА), однако, для этого необходимо использовать возможно более точные (а следовательно, сложные и трудоемкие) математические модели движения, в частности, модель гравитационного потенциала Земли. Наибольшее распространение в практике навигационно-баллистического обеспечения летных испытаний и эксплуатации КА получило разложение геопотенциала в ряд по сферическим функциям:

$$U=\frac{\mu}{r}\left\{1+\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left[C_{nm}\cos(m\lambda)+S_{nm}\sin(m\lambda)\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n}P_{nm}(\sin(\phi))\right\} \qquad (1)$$

где $U$ – потенциал гравитационного поля Земли; $\mu$ – гравитационный параметр Земли; $R$ – средний экваториальный радиус Земли; $\phi$, $\lambda$, $r$ – широта, долгота и радиус-вектор текущего положения КА; $N$ – количество удерживаемых членов бесконечного ряда; $P_{nm}$ – полиномы Лежандра и присоединенные сферические функции; $C_{nm}$, $S_{nm}$ – постоянные коэффициенты.

Характерной особенностью этой модели является значительное замедление сходимости ряда (1) при увеличении числа учитываемых членов $N$. Кроме того, точность знания коэффициентов $C_{nm}$, $S_{nm}$ ухудшается с ростом $n$ и $m$. Вследствие этого возникает необходимость в оценивании влияния ошибок коэффициентов $C_{nm}$ и $S_{nm}$ на точность прогнозирования движения центра масс КА. Применение моделей геопотенциала, включающих в свой спектр даже 8 полных гармоник ,не говоря уже о более сложных моделях,делает невозможным использование таких методов, как, например, метод статистического моделирования, и требует разработки специального подхода.

Для решения поставленной задачи сделаем следующие допущения.

1. Коэффициенты $C_{nm}$ и $S_{nm}$ будем считать независимыми случайными величинами с известными среднеквадратическими отклонениями.

2. Поскольку производится оценивание влияния модели геопотенциала на ошибки прогноза, будем считать все остальные силы, действующие на КА в полете, известными абсолютно точно.

Запишем уравнения движения центра масс КА в геоцентрической системе координат.

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}(t) \\ \dfrac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g}(\bar{r}) + \bar{a}(\bar{r},\bar{V},t) \end{cases} \qquad (2)$$

где $\bar{r}=\{x,y,z\}$ - вектор положения центра масс КА; $\bar{V}=\{V_x,V_y,V_z\}$ - вектор скорости центра масс КА; $\bar{a}(\bar{r},\bar{V},t)$ - суммарное ускорение КА от влияния всех действующих на него сил, за исключением аномалий силы тяжести; $\bar{g}(\bar{r})=\{g_x,g_y,g_z\}$ - ускорение КА под действием аномалий силы тяжести.

При этом $$\bar{g} = [M(\bar{r})]\begin{bmatrix} g_r \\ g_m \\ g_1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

где $g_r$, $g_m$, $g_1$ - радиальная, меридианальная и долготная составляющие ускорения от аномалий; $[M(\bar{r})]$ - матрица (размера 3x3) перехода к геоцентрической системе координат.

Уравнения для радиальной, меридианальной и долготной составляющих ускорения от аномалий геопотенциала имеют вид:

$$\begin{cases} g_r = \dfrac{\mu}{r^2} \sum\limits_{n=2}^{N} \left(\dfrac{R}{r}\right)^n (n+1) \sum\limits_{m=0}^{n} \Big(C_{nm}\cos(m\lambda)+S_{nm}\sin(m\lambda)\Big)P_{nm} \\ g_m = \dfrac{\mu}{r^2} \sum\limits_{n=2}^{N} \left(\dfrac{R}{r}\right)^n \sum\limits_{m=0}^{n} \Big(C_{nm}\cos(m\lambda)+S_{nm}\sin(m\lambda)\Big)(P_{nm+1}-m\,tg(\phi)P_{nm}) \\ g_1 = \dfrac{\mu}{r^2} \dfrac{1}{\cos(\phi)} \sum\limits_{n=2}^{N} \left(\dfrac{R}{r}\right)^n \sum\limits_{m=0}^{n} \Big(S_{nm}\cos(m\lambda)-C_{nm}\sin(m\lambda)\Big)mP_{nm} \end{cases} \qquad (4)$$

С учетом (4) уравнение (3) может быть записано в виде:

$$\bar{g}=[M(\bar{r})][A(\bar{r})]\bar{C} \tag{5}$$

где $\bar{C}=\{C_{20},C_{21},\ldots,C_{NN},S_{21},S_{22},\ldots,S_{NN}\}$ – вектор коэффициентов в разложении геопотенциала (4); $[A(r)]$ – матрица размера $3x((n_g+1)^2-4)$, состоящая из сомножителей при $C_{nm}$, $S_{nm}$.

Решая задачу Коши для системы (2) при известных начальных условиях $\bar{r}(t_0)$ и $V(t_0)$, найдем отклонения радиуса-вектора и вектора скорости от номинальных значений при отклонении $\Delta C$ случайного вектора коэффициентов разложения геопотенциала от математического ожидания.

$$\begin{cases} \Delta\bar{r}=\bar{r}(t,\bar{C}+\Delta\bar{C})-\bar{r}(t,\bar{C})=\displaystyle\iint_{t_0}^{t}[M][A]dt^2\,\Delta\bar{C} \\ \Delta\bar{V}=\bar{V}(t,\bar{C}+\Delta\bar{C})-\bar{V}(t,\bar{C})=\displaystyle\int_{t_0}^{t}[M][A]dt\Delta\bar{C} \end{cases} \tag{6}$$

В полученных выражениях зависимости $\Delta\bar{r}(\Delta C)$ и $\Delta\bar{V}(\Delta C)$ носят линейный характер. Поэтому оценки ковариационных матриц радиуса-вектора $[K_r]$ и вектора скорости $[K_V]$ могут быть найдены с помощью соотношений

$$\begin{cases} [K_r]=[I][K_0][I]^T \\ [K_V]=[I_1][K_0][I_1]^T \end{cases} \tag{7}$$

где $[I(t)]=\displaystyle\iint_{t_0}^{t}[M][A]dt^2\,\Delta\bar{C}$ – матрица размера $3x((n_g+1)^2-4)$ ;

$[I_1(t)]=\displaystyle\int_{t_0}^{t}[M][A]dt\Delta\bar{C}$ – матрица размера $3x((n_g+1)^2-4)$ ;

$[K_0]$ – ковариационная матрица вектора $\bar{C}$.

Дополним систему дифференциальных уравнений (2) двумя матричными уравнениями для $[I]$, $[I_1]$.

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}(t) \\
\dfrac{d\bar{V}}{dt} = \bar{g}(\bar{r}) + \bar{a}(\bar{r},\bar{V},t) \\
\dfrac{d[I]}{dt} = [I_1] \\
\dfrac{d[I_1]}{dt} = [M(\bar{r}(t))][A(\bar{r}(t))]
\end{cases}
\qquad (8)
$$

При этом для первых двух уравнений начальные условия $\bar{r}(t_0)$ и $\bar{V}(t_0)$ известны. Значения $[I(t_0)]$ и $[I_1(t_0)]$ определяются из уравнений (7) при заданных $[K_r(t_0)]$ и $[K_V(t_0)]$. В случае оценивания только влияния неточности коэффициентов разложения геопотенциала на ошибки прогнозирования необходимо положить $[K_r(t_0)]=0$ и $[K_V(t_0)]=0$, откуда следует $[I(t_0)]=0$ и $[I_1(t_0)]=0$.

Таким образом, для решения поставленной задачи сформулирована методика, которая математически записывается в виде соотношений (7) и (8) и позволяет получить оценку ошибок прогноза параметров движения центра масс космического аппарата, движущегося по заданной орбите на интервале $(t_0,t)$.

При данном подходе снимается необходимость многократного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2) со сложными правыми частями. Вместо этого производится однократное решение системы (8), имеющей, впрочем, значительно более высокую размерность (для модели геопотенциала, учитывающей 36 полных гармоник, общее количество уравнений равно 8196). Однако, эта трудность может быть преодолена при программной реализации алгоритма путем совмещения матричного и векторного представлений интегрируемых переменных и разделения матричных и векторных операций в блоках расчета правых частей и интегрирования.