УДК 629.78.05

Горелов Ю.Н., Данилов С.Б., Мантуров А.И., Усталов Ю.М.

К ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ЗАКОНОВ ОПТИМАЛЬНОГО СКАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАРШРУТОВ СЪЁМКИ ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ

Получаемая с помощью космических систем дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) информация находит всё более широкое применение для решения прикладных задач в различных отраслях народного хозяйства. Возрастающие требования к качеству такой информации предъявляют, в свою очередь, новые требования к эффективности управления угловым движением космических аппаратов (КА) ДЗЗ [1-4]. Одним из основных способов наблюдения заданных районов зондирования является маршрутная съёмка в режиме «push broom» («заметания») [4]. В зависимости от геометрических характеристик районов зондирования, маршруты съёмки (МС) могут иметь сложную геометрию и произвольное расположение относительно трассы полёта КА, что предъявляет особые требования к управлению угловым движением КА ДЗЗ при сканировании таких МС [5]. В связи с этим в настоящей статье рассматривается один из возможных подходов к решению новой в теории управления угловым движением КА ДЗЗ вариационной задачи синтеза оптимального управления сканированием произвольного МС, которая была сформулирована в [6].

1. Постановка задачи. В [6] приведены основные элементы математической модели сканирования заданного произвольного МС в режиме «push broom», в которой центральная линия МС задаётся в гринвичской системе координат радиус-вектором $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_M(s)$, где s – дуговая координата, отсчитываемая вдоль этой линии. При этом $s(t_0)=0$, где t_0 – момент начала сканирования, и $s(t_f)=s_f$, где s_f – длина, t_f – момент времени завершения сканирования МС. Здесь $t_f=\sigma(s_f)$, где $\sigma(s)$ – строго монотонно возрастающая функция, обратная к закону сканирования $s=s(t)$, получаемого из решения дифференциального уравнения $ds/dt=v_M$; $s(t_0)=0$, v_M – модуль вектора скорости сканирования $\mathbf{v}_M = v_M d\mathbf{r}_M/ds$. Величина v_M определяется из условия пропорциональности проекции $\mathbf{v}_M$ на фокальную плоскость аппаратуры зондирования КА величине $w=|\mathbf{w}|$, где $\mathbf{w}$ – вектор скорости бега изображения центральной линии МС, ортогональный приёмной линейке ПЗС [4, 6], то есть $v_M = P(t,s)w$, где $P(t, s)$ –

некоторая заданная функция. Здесь w – управляющий параметр, определяющий закон сканирования и, в конечном счёте, качество сканирования МС [6]:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(t, s, w) w dt, \tag{1}$$

где $F(t, s, w)$ – некоторая заданная функция. Отметим, что момент времени t_f в (1) не фиксирован, так как определяется законом сканирования. С учётом физических ограничений допустимые значения управляющего параметра w должны удовлетворять ограничениям:

$$0 < w_{\min} \le w \le w_{\max} < \infty. \tag{2}$$

Оптимальному закону сканирования заданного МС отвечает минимальное значение функционала (1). В связи с этим можно сформулировать следующую вариационную задачу [6]: найти такое допустимое управление $w = w_{\text{opt}}(\cdot)$, которое удовлетворяет ограничениям (2) и доставляет минимум функционалу (1) с учётом дифференциальной связи:

$$\frac{ds}{dt} = P(t, s) w \tag{3}$$

и граничных условий для неё:

$$s(t_0) = 0; \quad s(t_f) = s_f. \tag{4}$$

В общем случае функционал задачи (1) – (4) можно заменить следующим [6]:

$$J_\beta = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, s, w) w + \beta (w - w^*)^2 \right] dt, \tag{5}$$

где $\beta \ge 0$ – весовой коэффициент, $w^* = w^*_{\text{пр}}(t, s)$ – некоторая заданная функция.

2. Условия оптимальности. В соответствии с принципом максимума и с учётом (3), (5) гамильтониан задачи (2) – (5) имеет следующий вид [7]:

$$H(t, s, w, \psi) = -F(t, s, w) w - \beta (w - w^*)^2 + \psi P(t, s) w, \tag{6}$$

где ψ – сопряжённая переменная, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(t, s, w, \psi)}{\partial s}, \tag{7}$$

граничные условия для которого должны иметь вид:

$$\psi(t_0) = \psi_0; \quad \psi(t_f) = \psi_f. \tag{8}$$

Так как в силу граничных условий (4) значения фазовой переменной заданы, то значения сопряжённой переменной ψ_0 и ψ_f в моменты времени t_0 и t_f не определены. Здесь также должно выполняться условие трансверсальности [7]:

$$H(t_f, s_f, w_{\text{opt}}(t_f), \psi(t_f)) = 0. \quad (9)$$

Оптимальное управление w_{opt} определяется из условия максимума (6) по w:

$$w_{\text{opt}}(t) = \max_{w_{\min} \le w \le w_{\max}} H(t, s(t), w, \psi(t)).$$

Как известно [7], для задачи (2) – (5) справедлив принцип максимума, а именно если управляющий параметр $w = w_{\text{opt}}(t)$ удовлетворяет ограничениям (2) и соответствующее ему решение дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (4), доставляют минимум функционалу (5) (или функционалу (1) при $\beta = 0$), то существует такое ненулевое непрерывное решение системы (7) $\psi(t)$, что при каждом $t \in [t_0, t_f]$ гамильтониан (6) достигает максимума по w, а также выполняется условие трансверсальности (9), которое с учётом (6) имеет вид

$$\psi(t_f) P(t_f, s_f) w_f - F(t_f, s_f, w_f) w_f - \beta (w_f - w^*)^2 = 0, \quad (10)$$

где $w_f = w_{\text{opt}}(t_f)$

Соответственно, оптимальное управление в задаче (2) – (5) имеет вид:

$$w_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} w_{\max}, & \widetilde{w}(t) \ge w_{\max}; \\ \widetilde{w}(t), & w_{\min} < \widetilde{w}(t) < w_{\max}; \\ w_{\min}, & \widetilde{w}(t) \le w_{\min}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\widetilde{w}(t)$ – стационарная точка гамильтониана (6) по управляющему параметру.

Очевидно, что при $\beta = 0$ задача (2) – (5) сводится к задаче (1) – (4). При $\beta \to \infty$ имеет место: $\widetilde{w}(t) = w^*$ (при $w^* = \text{const}$ – переход к задаче параметрической оптимизации). То же самое, но только при $t \to t_f$, получим и из условий трансверсальности (10) с учётом свойств функций $F(t, s, w)$, $P(t, s)$ и ограниченности решения сопряжённого уравнения (7).

3. Вычислительная схема. С учётом приведённых необходимых условий оптимальности решение задачи (2) – (5) (в том числе и при $\beta = 0$) сводится с учётом (11) к решению краевой задачи (3), (4) и (7). Известно достаточно много эффективных численных методов решения вариационных задач типа (2) – (5) или (1) – (4) [7], к которым относятся и методы, базирующиеся на принципе максимума Понтрягина и учитывающие

щие те или иные особенности решаемой задачи. В рассматриваемой здесь задаче к ним относятся: во-первых, «квазилинейный» вид функционала (1) и линейность дифференциальной связи (3) по управляющему параметру w и, во-вторых, в функционалах (1) и (5) момент времени t_f не фиксирован, что приводит к дополнительному условию (9) или (10). Последнее даёт возможность построить начальное приближение для решения задачи (2) – (5).

Действительно, если в задаче параметрической оптимизации найдено $w^* = \text{const}$ ($w_{\min} \le w^* \le w_{\max}$) и соответствующее ему значение $t_f = t_f^*$ из условия минимума функционала (1) с учётом (2) и (3), то в качестве начального приближения можно принять: $t_f^{(0)} = t_f^*$ и $\widetilde{w}^{(0)}(t) = w^*$. Кроме того, из условий трансверсальности (10) (вообще говоря, при любых $w_{\min} \le w(t_f) \le w_{\max}$ и $\beta \ge 0$) также можно получить начальное приближение для конечного значения сопряжённой переменной

$$\widetilde{\psi}_f^{(0)} = \psi(t_f^*) = \frac{F(t_f^*, s_f, w^*)}{P(t_f^*, s_f)}. \tag{12}$$

Чтобы найти t_f^*, вначале следует проинтегрировать дифференциальное уравнение (3) при $w = w^*$ с нулевым начальным условием (4). Далее с учётом полученного решения $s = \widetilde{s}^{(0)}(t)$, $t \ge t_0$ необходимо определить момент времени t_f^* из условия: $\widetilde{s}^{(0)}(t_f^*) = s_f$. Тогда из (12) получим значение $\widetilde{\psi}_f^{(0)}$ и уравнение для сопряжённой переменной (7) в виде

$$\frac{d\widetilde{\psi}^{(0)}(t)}{dt} = -\left.\frac{\partial H(t, s, w^*, \widetilde{\psi}^{(0)}(t))}{\partial s}\right|_{s=\widetilde{s}^{(0)}(t)}.$$

С конечным условием $\widetilde{\psi}^{(0)}(t_f^*) = \widetilde{\psi}_f^{(0)}$ проинтегрируем уравнение в обратном времени на интервале $[t_0, t_f^*]$ и получим $\widetilde{\psi}^{(0)}(t)$. При $t = t_0$ получим значение $\widetilde{\psi}^{(0)}(t_0)$ в качестве начального приближения для ψ_0 в (8).

Таким образом, принимая в качестве начального значения сопряжённой переменной в (4) значение $\widetilde{\psi}^{(0)}(t_0)$, то есть $\psi_0^{(1)} = \widetilde{\psi}^{(0)}(t_0)$, и учитывая (11) $w^{(1)}(t) = w_{\text{opt}}(t)$, можно решить соответствующую задачу Коши для системы (3) и (7) в прямом времени до выполнения конечного условия из (4): $s^{(1)}(t_f^{(1)}) = s_f$ и получит при этом начальное приближение для решения вариационной задачи (2) – (5) в виде $\tilde{s}^{(1)}(t)$; $\tilde{\psi}^{(1)}(t)$; $\tilde{w}^{(1)}(t)$, $\forall t \in [t_0, t_f^{(1)}]$, а также $t_f^{(1)}$ и значение (5)

$J_\beta^{(1)} = \int\limits_{t_0}^{t_f} \left[F(t, \tilde{s}^{(1)}(t), \tilde{w}^{(1)}(t))\overline{w}^{(1)}(t) + \beta(\tilde{w}^{(1)}(t) - w^*)^2\right]dt$. При этом получим значение гамильтониана (6) как функцию $\psi_0^{(1)}$ (и β):

$$H(t_f^{(1)}, s_f, \tilde{w}^{(1)}(t_f^{(1)}), \overline{\psi}^{(1)}(t_f^{(1)})) = \Delta_\beta(\psi_0^{(1)})$$

Очевидно, что в общем случае $\Delta_\beta(\psi_0^{(1)}) \neq 0$. Поэтому решение задачи сводится, в конечном счёте, к решению уравнения: $\Delta_\beta(\psi_0) = 0$ с помощью какого-либо известного численного метода [7, 8]. В результате будет построена последовательность: $\psi_0^{(k)}$, $\tilde{w}^{(k)}(t)$ ($\forall t \in [t_0, t_f^{(k)}]$), $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $\tilde{\psi}_0^{(k)}$ – k-е приближение для начального значения сопряжённой переменной, $\tilde{w}^{(k)}(t)$ – k-е приближение для искомого оптимального управления (11), $t_f^{(k)}$ – аналогичное приближение для t_f. При этом последовательность $\tilde{w}^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, сходится к искомому оптимальному управлению (10), а последовательность $J_\beta^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, – к минимуму функционала задачи (5).

Как известно [8], скорость сходимости последовательных приближений в аналогичных задачах, как правило, повышается (а, возможно, и гарантируется, что не менее существенно), если ввести в итерационный процесс построения последовательных приближений следующую модификацию:

$$\beta^{(k)} \to \beta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где β – весовой коэффициент в (5), а $\beta < \beta^{(0)} < \infty$ – достаточно большое число.

Отметим, что рассмотренная выше вычислительная схема решения задачи (2) – (5) эффективна и в том случае, если рассматривать её применительно к разработке соответствующих бортовых алгоритмов КА ДЗЗ для оптимального сканирования произвольных МС. Прикладная ценность результатов решения рассмотренной задачи этим не исчерпывается, так как в её рамках также получают строгое обоснование алгоритмы приближённо-оптимального управления сканированием, в том числе алгоритмы локально оптимального управления [7].

Библиографический список

1. Соллогуб, А.В. Комические аппараты систем зондирования поверхности Земли [Текст]/ А.В. Соллогуб, Г.П. Аншаков, В.В. Данилов.– М.: Машиностроение, 1993. – 368 с.
2. Рис, У.Г. Основы дистанционного зондирования [Текст]/ У.Г. Рис. – М.: Техносфера, 2006. – 336 с.
3. Лурье, И.К. Геоинформационное картографирование. Методы геоинформатики и цифровой обработки космических снимков [Текст]/ И.К. Лурье. – М.: КДУ, 2008. – 424 с.
4. Бакланов, А.И. Системы наблюдения и мониторинга [Текст]/ А.И. Бакланов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 234 с.
5. Горелов, Ю.Н. Управление угловым движением КА дистанционного зондирования [Текст]/ Ю.Н. Горелов, Г.П. Аншаков, А.И. Мантуров, Ю.М Усталов// Всерос. научно-техн. журнал «Полет». – 2006. – № 6. – С.12-18.
6. Горелов, Ю.Н. Об оптимальном сканировании маршрутов съёмки на поверхности Земли космическими средствами дистанционного зондирования [Текст]/ Ю.Н. Горелов// Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т.16. – Вып.1. – С.141-142.
7. Моисеев, Н.Н. Элементы теории оптимальных систем [Текст]/ Н.Н. Моисеев – М.: Наука, 1974. – 528 с.
8. Евтушенко, Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации [Текст]/ Ю.Г. Евтушенко – М.: Наука, 1982. – 432 с.