УДК 629.10

В.В.Васильев

КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ НЕРЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ АТМОСФЕРЫ В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Настоящая работа посвящена построению оптимальных программ плоской коррекции эллиптических орбит космических аппаратов с электрореактивными двигателями малой тяги в нецентральном гравитационном поле с учетом сопротивления атмосферы. Вариационная задача решается с помощью принципа максимума Л.С.Понтрягина /1/. В отличие от работы автора /2/, управление осуществляется при постоянном уровне реактивного ускорения, который является подбираемым оптимизируемым параметром.

Рассмотрим плоское управляемое движение КА на низкой орбите в поле сжатого сфероида с потенциалом

$$U = \frac{\mu}{r}\,[1-J_2(\frac{R^e}{r})^2\,P_{20}(\sin\phi)]. \qquad (1)$$

Здесь μ - гравитационный параметр Земли; r - расстояние до центра земного эллипсоида; J^2 - коэффициент при второй зональной гармонике разложения гравитационного потенциала; R^e - средний экваториальный радиус Земли; $P_{20}(\sin\phi)$ - полином Лежандра второго порядка; ϕ - геоцентрическая широта.

Плотность атмосферы аппроксимируется выражением

$$\rho = \rho_0\,\exp\,[-\beta(h - h_0)], \qquad (2)$$

где h_0, ρ_0, β - константы модели, h - высота над поверхностью Земли, $h=r-R^e(1-\varepsilon\sin^2\phi)$, ε - коэффициент сжатия земного эллипсоида.

Будем считать, что вектор тяги аппарата лежит в плоскости орбиты, ориентация тяги относительно трансверсали характеризуется углом α. Управление осуществляется нерегулируемым двигателем малой тяги, который может быть либо включен и тогда тяга P постоянна, либо выключен, тогда $P=0$. Изменением массы аппарата за время маневра будем пренебрегать, это соответствует постоянному реактивному ускорению a.

Запишем дифференциальные уравнения возмущенного движения аппарата /3/:

$$\frac{dp}{du} = 2\gamma\,r^3(a\delta\,\cos\alpha + f_t + g_t),$$

$$\frac{dQ}{du} = \gamma\, [-L+2r^3(a\delta\, \cos\alpha + f_t + g_t)],$$

$$\frac{dL}{du} = \gamma[Q+\frac{r^3 L}{p}(a\delta\, \cos\alpha + f_t + g_t)] + r^2(a\delta\, \sin\alpha + f_s + g_s)], \tag{3}$$

$$\frac{dt}{du} = \gamma\, r^2 (p)^{-1/2},$$

где $\gamma = (1 - \frac{r^3}{p} g_w \text{ctg } i \sin u)^{-1}$, $r = p/(1 + Q)$.

Здесь P – фокальный параметр, $Q=e \cos \vartheta$, $L=e \sin \vartheta$, e – эксцентриситет орбиты, ϑ – истинная аномалия, u – аргумент широты, f_s, f_t – радиальная и трансверсальная составляющие аэродинамического ускорения, g_s, g_t, g_w – соответственно, радиальная, трансверсальная и бинормальная составляющие возмущающего гравитационного ускорения, обусловленного нецентральностью гравитационного поля, $\delta = \{0,1\}$ – управляющая функция, обеспечивающая выключение и включение двигателя. Система дифференциальных уравнений записана в безразмерном виде, масштабом расстояния выбран радиус орбиты в перигее. Выражения для гравитационных g_s, g_t, g_w и аэродинамических ускорений приведены в /2/, бинормальные составляющие аэродинамического ускорения считаются пренебрежимо малой величиной.

Обозначим через $\bar{x} = \{p,Q,L,t\}$ вектор фазовых координат. Рассмотрим следующие граничные условия: начальная точка $x(u_0)$ фиксирована, в конечной точке заданы s фазовых координат ($s\leqslant 4$) и $m=4-s$ уравнений связи:

$$u = u_0, \quad \bar{x}(u_0) = \bar{x}_0, \tag{4}$$

$$u = u_1, \quad x_i(u_1) = x_{1i}, \quad i = 1,s,$$

$$\Phi_j(\bar{x}) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{5}$$

2. Сформулируем задачу об оптимальной плоской коррекции орбиты КА: необходимо выбрать программы включения двигателя $\delta(u)$, угла ориентации тяги $\alpha(u)$ и постоянный уровень реактивного ускорения a=const, обеспечивающие минимум функционала

$$\mathcal{J} = \int_{t0}^{t1} a^2 \delta\, dt \longrightarrow \min \tag{6}$$

при дифференциальных связях (3) и граничных условиях (4)-(5).

Будем решать задачу с помощью принципа максимума Л.С.Понтрягина /1/. Введем вектор сопряженных переменных $\Phi=\{\phi_p,\phi_Q,\phi_L,\phi_t,-1\}$ и составим функцию Гамильтона H

$$H=\gamma\{A(a\delta\cos\alpha+f_t+g_t)-L\psi_Q+Q\psi_L+r^2(a\delta\sin\alpha+f_n+g_n)\psi_L+$$

$$+\psi_t r^2(p)^{-1/2}-a^2\delta r^2(p)^{-1/2}\} \tag{7}$$

Здесь $A=2r^3\psi_p+2r^2\psi_Q+r^3L\psi_L/p$.

Из условия максимума функции H определим оптимальные программы управления

$$\operatorname{tg}\alpha_{opt}=r^2\psi_Q/A, \tag{8}$$

$$\delta=\begin{cases}1, & \text{если } \Delta>0,\\ 0, & \text{если } \Delta\leqslant 0,\end{cases} \tag{9}$$

где $\Delta=(A^2+r^4\psi_L^2)^{1/2}-a\,r^2(p)^{-1/2}$. $\qquad$ (10)

Переход к независимой переменной u позволяет обойтись без дифференциального уравнения для сопряженного множителя ψ_u, так как он не влияет на оптимальные программы управления (8) и (9). Сопряженные переменные описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{du}=-\frac{dH}{dx_i}. \tag{11}$$

Условия трансверсальности для граничных условий (5) имеют вид

$$\psi_j(u_1)=\sum_{i=1}^{m}\nu_i\frac{\partial\Phi^i(\bar{x})}{\partial x_j}. \tag{12}$$

Для определения оптимального уровня реактивного ускорения (постоянного параметра задачи) используется дополнительное условие

$$\int_{u0}^{u1}\frac{\partial H}{\partial a}\,du=0. \tag{13}$$

В результате анализа необходимых условий оптимальности вариационная задача сводится к краевой задаче пятого порядка: подбору неизвестных начальных условий сопряженных переменных ψ_{po}, ψ_{Qo}, ψ_{Lo}, ψ_t и уровня реактивного ускорения a, удовлетворяющих граничным условиям (5) при заданных начальных условиях (4), дифференциальных связях (3) с учетом (8)-(11). Заметим, что если время коррекции не задано, то $\psi_t=0$ и порядок краевой задачи уменьшается на единицу.

3. В качестве примера приведем результаты решения вариационной задачи при коррекции ошибок в радиусе перигея и времени полета от атмосферы на двух витках полета. На рис.1 приведены оптимальные программы реактивного ускорения a и угла α (сплошные линии). Пунктирные линии соответствуют коррекции "идеальным" двигателем малой

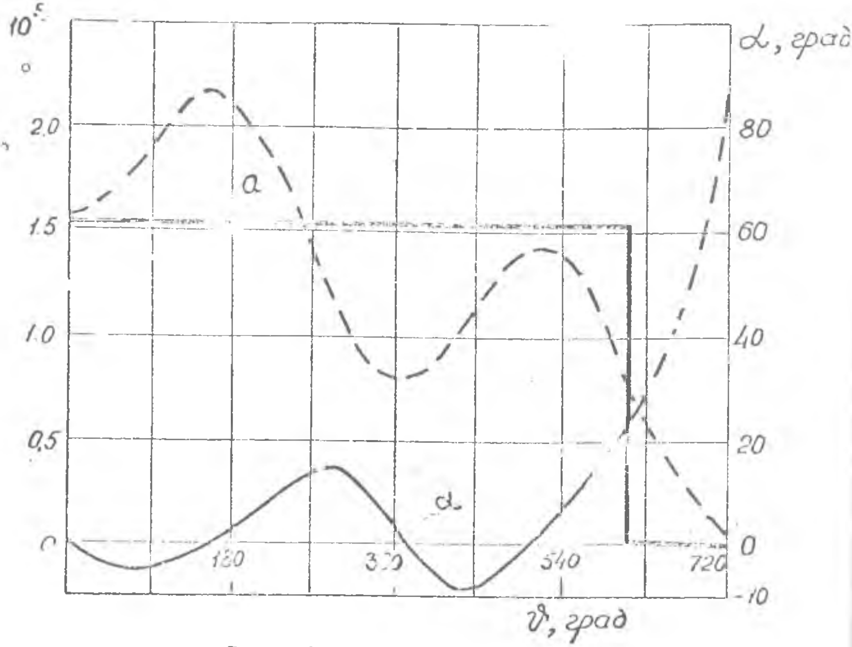

Рис. 1

тяги, рассмотренной в работе /2/. Проигрыш в функционале при использовании нерегулируемого двигателя составляет 11-15%, оптимальная программа ориентации тяги практически не изменяется при переходе от "идеального" к нерегулируемому двигателю. Полученные программы не требуют регулирования тяги ЭРД и могут использоваться при построении алгоритмов управления в качестве базовых.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе В.Г., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.- М.:Наука, 1969. - 384 с.

2. Васильев В.В. Оптимальное управление эллиптической орбитой спутника Земли с двигателем малой тяги //Космические исследования, 1980, т.18, вып.5, с.707-713.

3. Ларичева В.В., Рейн М.В. О решении задачи оптимального перелета с эллиптической орбиты на параболическую //Космические исследования, 1968, т.6, вып.2, с.213-219