

ЛАМИНАРНАЯ СТРУЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ СТЕНКЕ

Во многих технологических устройствах применяются струйные методы охлаждения поверхностей. Производство листов, пленок и др. на установках непрерывного действия со струйными методами охлаждения приводит к схеме течения, представленной на рис. 1.

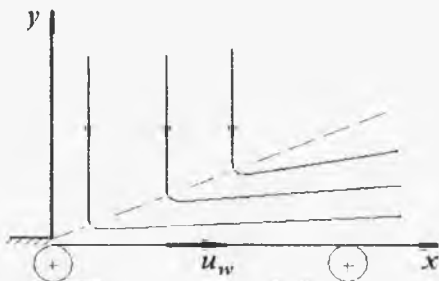


Рис. 1 Схема течения

Струя вытекает по касательной к плоской стенке с бесконечно большой скоростью из плоского точечного источника. Этот источник располагается в начале координат xOy . Плоская стенка движется с постоянной скоростью u_w в положительном направлении оси x . Ось y направлена по нормали к движущейся поверхности.

Уравнения движения и неразрывности вязкой несжимаемой жидкости при постоянном давлении в рассматриваемой области имеют вид [1]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Здесь u и v — продольная и поперечная составляющие скорости потока соответственно, по вдоль координат x и y ; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Введем функцию тока ψ по формулам

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

соответственно удовлетворяется уравнение неразрывности (2), а уравнение движения (1) сводится к уравнению третьего порядка

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (4)$$

Это уравнение необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$\psi|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = u_w, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Решение данной задачи должно удовлетворять также некоторому интегральному условию. Оно получается тем же путем, как в задаче о пристенной струе, распространяющейся вдоль неподвижной поверхности [2]. Уравнению (1) с учетом уравнения (2) можно придать вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

После интегрирования полученного уравнения поперек пограничного слоя от y до ∞ имеем

$$\int_y^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dy - (uv) \Big|_y^{\infty} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_y^{\infty}$$

Заменяя в этом уравнении порядок интегрирования и дифференцирования и используя граничные условия (5), можно записать его как

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} u^2 dx - uv = \nu \frac{\partial u}{\partial y}$$

После умножения обеих частей полученного равенства на u , интегрирования результата поперек пограничного слоя от 0 до ∞ и использования второго граничного условия в (5) имеем

$$\int_0^{\infty} u \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u^2 dy \right) dx - \int_0^{\infty} u^2 v dy = \frac{1}{2} \nu u_w^2 \quad (6)$$

Следует отметить, что полученное равенство отличается от соответствующего равенства, полученного Н.И. Акатновым [1,2], правой частью и для неподвижной поверхности ($u_w = 0$)

они совпадают. Выполняя те же преобразования [1,2] в левой части (6), получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u \left(\int_0^{\infty} u^2 dy \right) dx - \frac{1}{2} \nu u_w^2$$

Интегрирование приводит к «уравнению сохранения»

$$\int_0^{\infty} u \left(\int_v^{\infty} u^2 dy \right) dy = E_0 + \frac{1}{2} \nu u_{\infty}^2 x, \quad (7)$$

где постоянную интегрирования E_0 можно найти как

$$E_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} u \left(\int_v^{\infty} u^2 dy \right) dy$$

по известным изменениям профиля продольной скорости на срезе сопла малой, но конечной высоты. В дальнейшем будем считать постоянную E_0 известной.

Одновременное движение поверхности и вдув струи из сопла конечной высоты делает рассматриваемую задачу неавтомоделной. Следуя [1], представим функцию тока ψ в виде ряда

$$\psi = (\nu E_0 x)^{1/2} F_0(\eta) + \left(\frac{\nu^2 x^2}{E_0} \right)^{1/4} u_{\infty} F_1(\eta) + \left(\frac{\nu^3 x^3}{E_0^3} \right)^{1/6} u_{\infty}^2 F_2(\eta) + \dots \quad (8)$$

где η — автомодельная переменная, которая для полуограниченной струи определяется как

$$\eta = \frac{y}{(\nu x)^{1/2}},$$

а F_0, F_1, F_2, \dots — неизвестные пока функции автомодельной переменной η .

Это представление решения в случае точечного источника сводится к первому члену ряда в (8).

Вводя в (7) функцию тока ψ по соотношениям (3), «уравнению сохранения» можно придать вид

$$\int_0^{\infty} u^2 \psi dy = E_0 + \frac{1}{2} \nu u_{\infty}^2 x. \quad (9)$$

Переходя в дифференциальном уравнении (4) для ψ к автомодельным переменным x и η , подставляя в результат представление (8), выполняя необходимые действия дифференцирования и умножения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , будем иметь обыкновенные дифференциальные уравнения для определения неизвестных функций F_0, F_1, F_2, \dots

$$4F_0''' + F_0 F_0'' + 2F_0'^2 = 0, \quad (10)$$

$$4F_1^{(iv)} + F_0''F_1'' + 2F_0''F_1'' + 3F_0''F_1'' = 0, \quad (11)$$

$$4F_2^{(iv)} + F_0''F_2'' + 5F_0''F_2'' = 3F_1''F_1'', \quad (12)$$

Из этих уравнений следует, что они могут быть решены последовательно друг за другом.

Граничные условия для них выводятся из (5) и имеют вид

$$\begin{aligned} F_0''(0) = F_1''(\eta) = F_2''(0) = \dots = 0, \\ F_0''(0) = 0, \quad F_1''(0) = 1, \quad F_2''(0) = \dots = 0, \\ F_0''(\tau) = F_1''(\tau) = F_2''(\tau) = \dots = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

К граничным условиям (13) необходимо добавить условия, вытекающие из «уравнения сохранения» (9):

$$\int_0^1 F_0'' d\eta = 1, \quad (14)$$

$$\int_0^1 (F_0''^2 F_1'' + 2F_0'' F_1'' F_2'') d\eta = 0, \quad (15)$$

$$\int_0^1 (F_0''^2 F_2'' + 2F_0'' F_1'' F_2'' + F_1'' (F_1''^2 + 2F_0'' F_2'')) d\eta = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Уравнение (10) с граничными условиями (13) и «уравнением сохранения» (14) совпадает с автомодельным решением [1,2]. Это решение известно, но оно выражается лишь в параметрической форме. Так как функция $F_0''(\eta)$ необходима для нахождения последующих функций $F_1''(\eta)$, $F_2''(\eta)$, то в данной работе она вычислялась численно разными способами. Один из них состоял в сведении решения краевой задачи к задаче Коши [3]. Следует также отметить, что решения этих уравнений являются универсальными функциями, так как они не зависят от параметров задачи E_0 и ν_0 .

Результаты расчетов приводятся на рис. 2, 4. Значения вторых производных функций $F_i''(\eta)$, $i = 0, 1, 2$ на стенке, необходимые для вычисления напряжения трения на подвижной стенке (при $\eta = 0$), оказались равными $F_0''(0) = 0,2209$, $F_1''(0) = 0,0$ и $F_2''(0) = -0,9123$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коробко В.И. Тсория неавтомоделных струй вязкой жидкости. – Саратов: Изд-во Саратов ун-та, 1977.
2. Акатнов И.И. Распространение плоской ламинарной струи жидкости вдоль твердой стенки //Груды ЛШИ. – М.: Машигиз, 1953. – № 5. – С. 24-31.
3. Цыганов М.В., Шахов В.1'. Ламинарный пограничный слой на пластине с движущейся по- верхностью. Деп. в ВИШТИ, 1987 г., №1379-В87.

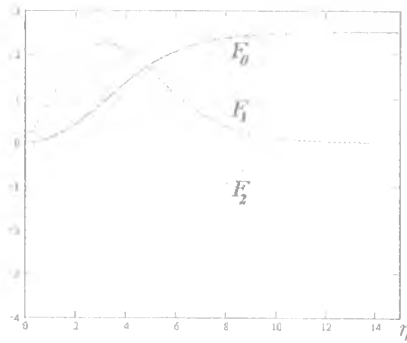


Рис. 2. Распределение безразмерных функций тока поперек струи

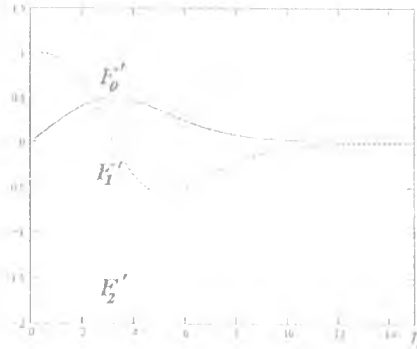


Рис. 3. Распределение безразмерных профилей скорости поперек струи

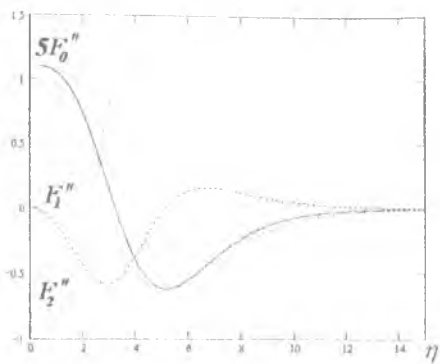


Рис. 4. Распределение безразмерных касательных напряжений поперек струи