УДК 629.786

Лаптев Е.В.

МЕТОД РАЗДЕЛЬНОГО ПОШАГОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ

Движение орбитальной тросовой системы (ОТС), состоящей из двух космических объектов, связанных гибким невесомым и нерастяжимым тросом, описывается следующей системой уравнений [1, 2]

$$m_1\ddot{\bar{r}}_1 = \bar{F}_1 + T\cdot\frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{D};$$
$$m_2\ddot{\bar{r}}_2 = \bar{F}_2 - T\cdot\frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{D}; \quad (1)$$
$$\ddot{L} = w_{тр},$$

где m_1, m_2 – массы объектов; $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ – радиус-векторы, определяющие положение объектов относительно центра масс Земли; $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ – равнодействующие внешних сил, действующих на объекты; T – сила натяжения троса; $D = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|$ – расстояние между объектами; L – длина выпущенного троса; $w_{тр}$ – закон выпуска (втягивания) троса.

Поскольку расстояние между объектами ОТС не может быть больше длины выпущенного троса, то в процессе её движения должно выполняться ограничение

$$D \le L. \quad (2)$$

Сила натяжения троса при этом изменяется по закону:

$$T = \begin{cases} 0, & \text{при}\,(D < L) \vee ((D = L) \wedge (\dot{D} < \dot{L})) \vee (T_p \le 0); \\ T_p, & \text{при}\,(D = L) \wedge (\dot{D} = \dot{L}) \wedge (T_p > 0), \end{cases} \quad (3)$$

где

$$T_p = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left\{\left(\frac{\bar{F}_2}{m_2} - \frac{\bar{F}_1}{m_1}\right)\cdot(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) - \ddot{L} + \frac{(\dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1)\cdot(\dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1) - \dot{L}^2}{L}\right\}. \quad (4)$$

Задача моделирования движения ОТС состоит в интегрировании уравнений (1) с учётом ограничения (2), условий (3) и (4), которое осложняется тем, что в них входит неизвестная и изменяющаяся по скачкообразному закону (3) сила натяжения троса.

Предлагается метод, позволяющий исключить указанную силу из уравнений движения и существенно упростить алгоритм моделирования.

Для его обоснования введём в рассмотрение систему с новыми переменными $\bar{\rho}_1(t)$, $\bar{\rho}_2(t)$, $\Delta\bar{\rho}_1(t)$, $\Delta\bar{\rho}_2(t)$:

$$
\begin{aligned}
& m_1\ddot{\bar{\rho}}_1 = \bar{F}_1; \\
& m_2\ddot{\bar{\rho}}_2 = \bar{F}_2; \\
& m_1\Delta\ddot{\bar{\rho}}_1 = T\cdot\left\{\frac{\bar{\rho}_2-\bar{\rho}_1}{D}+\frac{\Delta\bar{\rho}_2-\Delta\bar{\rho}_1}{D}\right\}; \\
& m_2\Delta\ddot{\bar{\rho}}_2 = -T\cdot\left\{\frac{\bar{\rho}_2-\bar{\rho}_1}{D}+\frac{\Delta\bar{\rho}_2-\Delta\bar{\rho}_1}{D}\right\}; \\
& \ddot{L} = w_{тр}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Если $\bar{\rho}_1(t), \bar{\rho}_2(t), \Delta\bar{\rho}_1(t), \Delta\bar{\rho}_2(t)$ являются решением системы (5) на некотором произвольном интервале $\Delta\tau_i = [t_i, t_i + \Delta t_i]$ при начальных условиях

$$\bar{\rho}_1(t_i) = \bar{r}_1(t_i); \quad \dot{\bar{\rho}}_1(t_i) = \dot{\bar{r}}_1(t_i); \quad \bar{\rho}_2(t_i) = \bar{r}_2(t_i); \quad \dot{\bar{\rho}}_2(t_i) = \dot{\bar{r}}_2(t_i); \tag{6}$$

$$\Delta\bar{\rho}_1(t_i) = 0; \qquad \Delta\dot{\bar{\rho}}_1(t_i) = 0; \qquad \Delta\bar{\rho}_2(t_i) = 0; \qquad \Delta\dot{\bar{\rho}}_2(t_i) = 0, \tag{7}$$

то суммы

$$\bar{r}_1(t) = \bar{\rho}_1(t) + \Delta\bar{\rho}_1(t); \qquad \bar{r}_2(t) = \bar{\rho}_2(t) + \Delta\bar{\rho}_2(t) \tag{8}$$

являются решением системы (1) на указанном интервале при начальных условиях

$$
\begin{aligned}
& \bar{r}_1(t_i) = \bar{\rho}_1(t_i) + \Delta\bar{\rho}_1(t_i); \qquad \dot{\bar{r}}_1(t_i) = \dot{\bar{\rho}}_1(t_i) + \Delta\dot{\bar{\rho}}_1(t_i); \\
& \bar{r}_2(t_i) = \bar{\rho}_2(t_i) + \Delta\bar{\rho}_2(t_i); \qquad \dot{\bar{r}}_2(t_i) = \dot{\bar{\rho}}_2(t_i) + \Delta\dot{\bar{\rho}}_2(t_i),
\end{aligned} \tag{9}
$$

и задача интегрирования системы (1) на интервале $\Delta\tau_i$ может быть сведена к интегрированию системы (5).

Вследствие того. что на достаточно малых интервалах $\Delta\tau_i$

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} |\Delta\bar{\rho}_1| \to 0; \qquad \lim_{\Delta t_i \to 0} |\Delta\bar{\rho}_2| \to 0; \qquad \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{d}{D} \to 1; \qquad \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{|\Delta\bar{\rho}_2 - \Delta\bar{\rho}_1|}{D} \to 0,$$

система (5) может быть существенно упрощена и приведена к виду

$$
\begin{aligned}
& m_1\ddot{\bar{\rho}}_1 = \bar{F}_1; \\
& m_2\ddot{\bar{\rho}}_2 = \bar{F}_2; \\
& m_1\Delta\ddot{\bar{\rho}}_1 = T\cdot\bar{d}^0; \\
& m_2\Delta\ddot{\bar{\rho}}_2 = -T\cdot\bar{d}^0; \\
& \ddot{L} = w_{тр},
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $\bar{d} = \bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1$; $d = |\bar{d}|$; $\bar{d}^0 = \bar{d}/d$.

Первые два уравнения системы (10) описывают движение объектов ОТС, которое они совершали бы под действием внешних сил будучи свободными телами. Поэтому они могут быть названы уравнениями их **псевдосвободного движения**. Третье и четвёртое уравнения учитывают действие троса и могут быть названы **уравнениями**

подтягивания, которые могут быть проинтегрированы аналитически.

Разложим векторы $\Delta\ddot{\bar{\rho}}_1$ и $\Delta\ddot{\bar{\rho}}_2$ на следующие составляющие

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\bar{\boldsymbol{\rho}}}_1 &= \Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{1d}\cdot\bar{\mathbf{d}}^0 + \Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{1n}\cdot\bar{\mathbf{n}}^0; \\ \Delta\ddot{\bar{\boldsymbol{\rho}}}_2 &= \Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{2d}\cdot\bar{\mathbf{d}}^0 + \Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{2n}\cdot\bar{\mathbf{n}}^0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\bar{\mathbf{n}}^0$ – произвольный единичный вектор, ортогональный вектору $\bar{\mathbf{d}}^0$.

С учётом (11) векторные уравнения подтягивания распадаются на две скалярные системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1\Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{1n} &= 0; \\ \mathbf{m}_2\Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{2n} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1\Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{1d} &= \mathbf{T}; \\ \mathbf{m}_2\Delta\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{2d} &= -\mathbf{T}, \end{aligned} \tag{13}$$

а ограничение (2) преобразуется к виду

$$\mathbf{d} + \Delta\boldsymbol{\rho}_{2d} - \Delta\boldsymbol{\rho}_{1d} \le \mathbf{L}. \tag{14}$$

При нулевых начальных условиях (7) на интервале $\Delta\tau_i$ система (12) всегда имеет тривиальное (нулевое) решение:

$$\Delta\boldsymbol{\rho}_{1n} \equiv 0; \qquad \Delta\boldsymbol{\rho}_{1n} \equiv 0; \qquad \Delta\boldsymbol{\rho}_{2n} \equiv 0; \qquad \Delta\boldsymbol{\rho}_{2n} \equiv 0. \tag{15}$$

Решение уравнений (13) зависит от значения силы натяжения троса.

Если трос не натянут, то $\mathbf{T} = 0$, ограничение (14) приводится к виду $\mathbf{d} < \mathbf{L}$, уравнения (13) на интервале $\Delta\boldsymbol{\tau}_i$ при нулевых начальных условиях (7) имеют тривиальное (нулевое) решение, подтягивания элементов ОТС не происходит, их движение совпадает с псевдосвободным.

Если трос натянут, то $\mathbf{T} > 0$. Из условия (14) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{d} + \Delta\boldsymbol{\rho}_{2d} - \Delta\boldsymbol{\rho}_{1d} &= \mathbf{L}, \\ \mathbf{d} + \Delta\dot{\boldsymbol{\rho}}_{2d} - \Delta\dot{\boldsymbol{\rho}}_{1d} &= \mathbf{L} \end{aligned} \tag{16}$$

и система (13) на интервале $\Delta\tau_i$ имеет ненулевое решение, удовлетворяющее интегральным соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1\Delta\dot{\boldsymbol{\rho}}_{1d} + \mathbf{m}_2\Delta\dot{\boldsymbol{\rho}}_{2d} &= 0; \\ \mathbf{m}_1\Delta\boldsymbol{\rho}_{1d} + \mathbf{m}_2\Delta\boldsymbol{\rho}_{2d} &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

которые несложно получить, складывая уравнения (13) и интегрируя их при начальных условиях (7).

Объединяя соотношения (16), (17), получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&m_1 \Delta\rho_{1d} + m_2 \Delta\rho_{2d} = 0;\\
&\Delta\rho_{1d} - \quad \Delta\rho_{2d} \; = d - L;\\
&m_1 \Delta\dot{\rho}_{1d} + m_2 \Delta\dot{\rho}_{2d} = 0;\\
&\Delta\dot{\rho}_{1d} - \quad \Delta\dot{\rho}_{2d} \; = \dot{d} - \dot{L},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

из которой определим параметры подтягивания

$$
\begin{aligned}
&\Delta\rho_{1d} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(d - L); \qquad \Delta\rho_{2d} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(d - L);\\
&\Delta\dot{\rho}_{1d} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\dot{d} - \dot{L}); \qquad \Delta\dot{\rho}_{2d} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(\dot{d} - \dot{L}).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Из представленного следует, что моделирование движения ОТС может быть сведено к следующему простому алгоритму.

1. Пошаговое интегрирование уравнений псевдосвободного движения и выпуска троса

$$
\begin{aligned}
&m_1 \ddot{\overline{\rho}}_1 = \overline{F}_1;\\
&m_2 \ddot{\overline{\rho}}_2 = \overline{F}_2;\\
&\ddot{L} \; = w_{тр}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

при начальных условиях (6) на каждом шаге.

2. Проверка на каждом шаге условий натяжения троса:

если $(d < L) \vee (d = L \wedge \dot{d} < \dot{L})$, то трос не натянут и параметры движения ОТС совпадают с параметрами псевдосвободного движения:

$$
\overline{r}_1 = \overline{\rho}_1; \qquad \dot{\overline{r}}_1 = \dot{\overline{\rho}}_1; \qquad \overline{r}_2 = \overline{\rho}_2; \qquad \dot{\overline{r}}_2 = \dot{\overline{\rho}}_2; \tag{21}
$$

если $(d \geq L) \wedge (\dot{d} \geq \dot{L})$, то трос натянут и параметры движения ОТС складываются из параметров псевдосвободного движения и движения подтягивания:

$$
\begin{aligned}
&\overline{r}_1 = \overline{\rho}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(d - L)\cdot\overline{d}^0; \qquad \overline{r}_2 = \overline{\rho}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(d - L)\cdot\overline{d}^0;\\
&\dot{\overline{r}}_1 = \dot{\overline{\rho}}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\dot{d} - \dot{L})\cdot\overline{d}^0; \qquad \dot{\overline{r}}_2 = \dot{\overline{\rho}}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\dot{d} - \dot{L})\cdot\overline{d}^0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Результаты моделирования движения ОТС предлагаемым методом показали его высокую точность и эффективность.

Библиографический список

1. Иванов, В.А. Динамика полёта системы гибко связанных космических аппаратов [Текст]/ В.А. Иванов, Ю.С. Ситарский. – М.: Машиностроение, 1986. – 245 с.
2. Алпатов, А.П. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями [Текст]/ А.П. Алпатов, В.В. Белецкий и др. – М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований, 2007. – 560 с.