

В.А.Вьюжанин, В.Б.Тугаров

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ БЛИЗКИХ ЧАСТОТ В СЛАБОЗАТУХАЮЩЕМ СИГНАЛЕ

В ряде технических задач оказывается необходимым осуществлять разложение измеренной в эксперименте функции на квазипериодические составляющие. Так применительно к динамике движения ния УКА имеет место задача определения спектра собственных частот по результатам траекторных измерений. Так, если произвести измерения угловой скорости движения центрального тела УКА, то полученная функция будет представлять собой совокупность свободных колебаний элементов конструкции. Последние, как известно, являются квазипериодическими функциями. Таким образом, если выделить из измеренной угловой скорости составляющие ее квазипериодические функции, то можно получить уточненный спектр нормальных частот УКА и использовать его при работе системы управления. Однако, спектр частот УКА часто оказывается настолько плотным, что к нему невозможно применить традиционный метод периодограммного анализа [1,2], поскольку на графике периодограммы пики, соответствующие отдельным частотам, сливаются друг с другом. В настоящей работе предлагается развитие методики периодограммного анализа, позволяющее выделять из исходного сигнала близкие частоты.

Рассмотрим функцию  $x(t)$ , являющуюся, например, угловой скоростью УКА и включающую в себя несколько квазипериодических функций

$$x(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^k (B_i \cos \omega_i t + D_i \sin \omega_i t) e^{-\beta_i t}, \quad (1)$$

где  $\omega_i$ ,  $\beta_i$ ,  $A_i$ ,  $\varphi_i$  - соответственно частота, коэффициент затухания, начальная амплитуда и фаза  $i$ -той составляющей,  $k$  - число функций,  $t$  - время.

Периодограммный анализ предполагает в данном случае вычисление коэффициентов интегрального преобразования Фурье

$$u(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \sigma \cos \omega t dt, \quad (2)$$

$$v(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \sigma \sin \omega t \, dt,$$

где  $\sigma = \sin(\pi t/L) / (\pi t/L)$  – множитель Гиббса, позволяющий применять преобразование Фурье на ограниченных временных интервалах  $t \in [-L, L]$ . Вычисление косинусного  $u(\omega)$  и синусного  $v(\omega)$  преобразований Фурье на некотором диапазоне частот  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$  с шагом  $\Delta\omega$  позволяет получить значения самой периодограммы

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)}. \quad (3)$$

Ярко выраженные пики на этом графике позволят определить частоты  $\omega_1$ , присутствующие в исходном сигнале, и соответствующие им амплитуды  $A(\omega_1)$ .

Как уже отмечалось, при наличии в сигнале близких частот экстремумы, соответствующие им, сливаются на графике периодограммы в один общий пик, в котором невозможно выделить отдельные частоты, а их амплитуды оказываются искажены взаимным влиянием частот. Для решения задачи при наличии близких частот был проведен поиск более чувствительной функции чем периодограмма  $A(\omega)$ . Была сделана попытка получить аналитическое решение, при котором максимумы периодограммы определялись бы по равенству нулю ее производной. Для этого необходимо получить выражения для  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$ , подставив формулу (1) в выражение (2) и разрешив интеграл. Однако, подинтегральное выражение получается сложным, и решить задачу удастся только прибегнув к упрощениям: отказавшись от множителя Гиббса и положив равным нулю коэффициент затухания. Тогда удастся получить выражения

$$u(\omega) = \sum_{\pm 1}^{K} B_{\pm 1} \left( \frac{\sin(\omega_1 - \omega)L}{(\omega_1 - \omega)L} + \frac{\sin(\omega_1 + \omega)L}{(\omega_1 + \omega)L} \right),$$

$$v(\omega) = \sum_{\pm 1}^{K} D_{\pm 1} \left( \frac{\sin(\omega_1 - \omega)L}{(\omega_1 - \omega)L} - \frac{\sin(\omega_1 + \omega)L}{(\omega_1 + \omega)L} \right), \quad (4)$$

которые можно подставить в (3), продифференцировать и получить выражение для производной периодограммы. Но, во-первых, полученное выражение не будет иметь ценности ввиду использованных допущений, во-вторых, оно громоздко и не удобно в работе. Между тем, производные могут

быть достаточно точно получены численным образом, поскольку график периодограммы при наличии близких частот имеет очень плавный вид. Анализ полученных графиков для производной периодограммы показал, что эта функция также является слабочувствительной при близких частотах. После этого были рассмотрены графики косинусного  $u(\omega)$  и синусного  $v(\omega)$  преобразования Фурье. Эти функции имеют самостоятельный физический смысл, поскольку выделяют в сигнале соответствующие составляющие частот  $\omega_1$  и могут рассматриваться без периодограммы. Кроме того, при сложении графиков этих функций для получения периодограммы происходит их взаимное затенение и часть информации теряется. Поэтому целесообразнее рассматривать их либо по отдельности, либо в другом сочетании. Построение графиков  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  и их анализ позволил отметить, что они более чувствительны чем  $A(\omega)$ , но не имеют экстремумов в точках  $\omega=\omega_1$ . Тогда была сделана попытка найти сочетания  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  или их производных, которые позволили бы решить поставленную задачу. Среди множества рассмотренных сочетаний был найден ряд функций, обладающих очень высокой чувствительностью. Это функции

$$F_1 = \frac{d^2}{d\omega^2} (u-v), \quad F_2 = \frac{d^3}{d\omega^3} (u+v), \quad F_3 = \frac{d^4}{d\omega^4} (u-v). \quad (5)$$

При этом оказалось, что такое сочетание синусной и косинусной части позволяет взаимопогашать малоинформативные части графиков  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  и усиливать их избирательные свойства. Следует сразу заметить, что поиск высокочувствительных функций велся среди наиболее простых сочетаний. Очевидно, что можно записать и более высокие производные или попробовать функции, основанные на произведении или степенной зависимости. Но наиболее простые функции будут более устойчивы к возможным помехам. Что касается взятия производных высокого порядка, то графики функций  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  оказываются настолько плавными, что их производные, даже высоких порядков, могут быть определены численно достаточно надежно [3].

В качестве примера для апробирования изложенной методики был рассмотрен квазипериодический сигнал содержащий пять частот: 1.00, 1.05, 1.10, 1.20, 1.25 1/с, амплитуды которых были равны 1, а коэффициенты затухания 0.1. Измерения проводились на интервале 10 сек с шагом 0.05 сек. Построение периодограммы дало лишь два размытых пика  $\omega_1 \approx 1.03$ ,  $\omega_2 \approx 1.24$ . Применение функций (3) позволило определить все пять частот с точностью до шага построения периодограммы  $\Delta\omega = 0.005$  1/с.

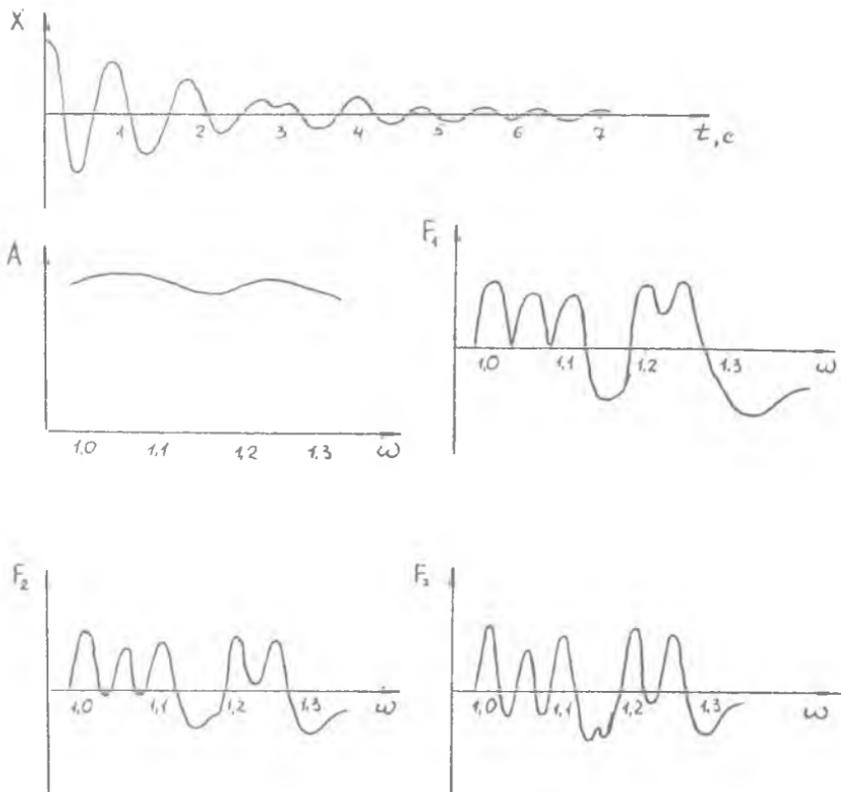


Рис.

### Список литературы

1. Серебрянников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. - М.: Наука, 1965. - 244 с.
2. Гельдфансбейн Я.А. Методы кибернетической диагностики динамических систем. - Рига: Зинатне, 1967. - 542 с.
3. Пашковский И.М., Леонов В.А., Поплавский Б.К. Летные испытания самолетов и обработка результатов испытаний. - М.:Машиностроение, 1985. - 416 с.