

МОДЕЛЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНТУРА В ПРИСУТСТВИИ ДВУХ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ

1. *Введение.* Задача обтекания произвольного контура в присутствии двух круговых контуров может встречаться при рассмотрении интерференции центрального корпуса и боковых ускорителей ракетносителей, а также фюзеляжа самолета и подвесных баков или грузов.

Поскольку рабочая область для такой задачи является многосвязной, то применение теории функции комплексной переменной (ТФКП) с конформным отображением становится затруднительным. Одним из основных методов решения задачи потенциального обтекания нескольких контуров можно считать численный метод сингулярностей. К таким методам относятся методы дискретных вихрей [1] и панельные методы [2, 3]. С математической точки зрения эти два метода похожи, поскольку оба приводят к необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицей плотной структуры. Рассмотрим на примере панельного метода особенности таких численных процедур. В панельном методе предполагается замена каждого контура N панелями. Если число контуров принять за k , то общее количество панелей при приблизительно одинаковой длине образующих контуров равно kN . Известно, что машинное время при решении СЛАУ с матрицей плотной структуры методом исключения пропорционально $(kN)^3$, а при применении итерационных методов – $mC(kN)^2$, где m – количество необходимых итераций для достижения заданной точности. Ясно, что при $m \ll N$ итерационные методы оказываются более экономичными по сравнению с методами исключения. Для удовлетворения высокой точности требуется большое число панелей, что независимо от выбранного численного метода решения СЛАУ неизбежно будет приводить к значительным затратам компьютерного времени. Поэтому поиск путей повышения экономичности панельных методов является актуальной задачей вычислительной гидродинамики.

Предлагается модифицированный панельный метод, позволяющий значительно сократить компьютерное время для задач, в которых только один контур имеет произвольную образующую, а остальные контуры представляют собой окружности. Идея метода реализована

на примере обтекания произвольного контура в присутствии двух одинаковых круговых контуров, хотя принципиальных трудностей распространить такой подход для большего количества круговых контуров или круговых контуров с различными радиусами не существует.

2. *Краткое описание метода.* Основой метода является панельный метод низкого порядка с распределенными источниками (стоками) на панелях [3], решающий задачу Лапласа с граничными условиями Неймана для потенциала скоростей на контуре. Граничными условиями в панельных методах являются условия равенства нулю нормальной компоненты скорости в контрольных точках для каждой панели. Такие точки иногда называют точками коллокаций. Получающаяся СЛАУ реализует выполнение граничных условий для всех контрольных точек панелей. В правой части СЛАУ обычно записывают вектор-столбец с элементами, которые вычисляются путем проектирования компоненты скорости набегающего невозмущенного потока на нормали к каждой панели [3]. В предлагаемом методе правые части СЛАУ определяются с учетом известных скоростей как от набегающего потока, так и от двух круговых контуров. В остальном, математическая модель модифицированного панельного метода ничем не отличается от описанной в работе [3]. Таким образом, если известно поле скоростей при обтекании системы двух круговых контуров невозмущенным потоком, то это решение можно использовать для построения более сложного течения, когда в поле будет присутствовать дополнительно еще один контур с произвольной образующей. При этом необходимо иметь в виду, что построенное таким образом решение будет приближенным, поскольку строго условия непротекания будут выполнены только на одном произвольном контуре, образующая которого будет разбита на панели. Экономичность такого метода очевидна, поскольку только один контур делится на панели и порядок матрицы уменьшается в 3 раза по сравнению со случаем, когда все три контура разбиваются на панели. Такое ускорение счета получается при одинаковой разбивке всех трех контуров на панели. При других вариантах разбивки контуров на панели выигрыш будет приближенно определяться уменьшением общего количества панелей, приходящихся на два круговых контура. Если с экономичностью предлагаемого метода все очевидно, то точность такого подхода требуется оценить. Некоторые результаты по точности метода приводятся ниже. Поскольку в предлагаемом панельном методе используется точная математическая модель обтекания потенциальным невозмущенным потоком системы двух круговых контуров, дадим краткое описание этой модели. Модель опирается на ТФКП, в которой осуществляется запись комплексного потенциала течения при обтекании системы двух круговых контуров. Для получения комплексного потенциала течения при обтекании системы двух круговых контуров невозмущенным потоком под

произвольным углом атаки воспользуемся теоремой об инверсии диполя относительно окружности [4], которая позволяет записать комплексный потенциал диполя вблизи кругового контура в следующем виде

$$w(z) = \frac{\mu e^{i\alpha}}{z-f} + \frac{\mu' e^{-i\alpha}}{z-f'}, \quad (1)$$

где $z = x + iy$ – комплексная переменная; i – мнимая единица; f – расстояние от центра окружности до центра диполя; $\mu e^{i\alpha}$ – комплексный момент диполя; f' – расстояние от центра окружности до центра инверсионного диполя; $\mu' e^{-i\alpha}$ – комплексный момент инверсионного диполя. На основании теоремы об инверсии диполя можно записать

$$\mu' = \frac{\mu a^2}{f^2}, \quad ff' = a^2, \quad (2)$$

где a – радиус окружности.

Таким образом, из теоремы об инверсии диполя относительно окружности можно видеть, что отображенный внутрь окружности диполь имеет меньший момент, чем у диполя, находящегося вне окружности. На этом свойстве основан метод многократного отражения диполей, которые формируют течение около системы круговых контуров.

Решение уравнения Лапласа можно получить путём суперпозиции фундаментальных решений для диполей и линейной функции для плоскопараллельного потока. Идея составления суммарного комплексного потенциала состоит в том, что для бесциркуляционного течения расчет начинается с размещения в центрах круговых контуров диполей с интенсивностями такими, чтобы связанные с ними окружности были линиями тока при обтекании каждого из изолированных цилиндров. Вторым шагом состоит в том, что внутри каждой окружности помещают отражение от диполей, соответствующих другим окружностям. При этом используется теорема об инверсии диполя относительно окружности в форме (1), (2). На третьем шаге внутри каждого кругового контура помещают диполи, инверсионные относительно диполей, появившихся на предыдущем шаге. Последующие шаги выполняются аналогичным образом. Вычислительная схема последовательной инверсии диполей показана на рис. 1 для частного случая течения около круговых контуров с одинаковыми радиусами ($a_1 = a_2$).

Представленный алгоритм можно формализовать в виде комплексного потенциала вида

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z),$$

$$W_0(z) = \bar{V}_\infty z + \left(\frac{\mu_1}{z-f_1} + \frac{\mu_2}{z-f_2} \right) e^{i\alpha}$$

$$W_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\mu_1^{(n)}}{z-f_1^{(n)}} + \frac{\mu_2^{(n)}}{z-f_2^{(n)}} \right] e^{(-1)^n i\alpha} \quad (3)$$

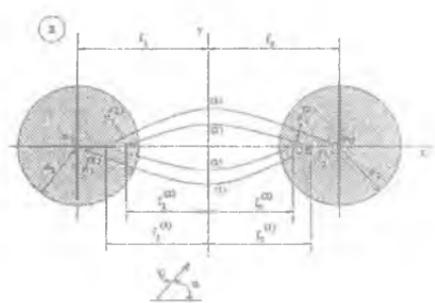


Рис. 1

где $W_0(z)$ – комплексный потенциал для невозмущенного потока и двух изолированных диполей, $W_1(z)$ – комплексный потенциал, обеспечивающий непротекание круговых контуров при их совместном обтекании; n – номер шага (инверсии); нижний индекс “1” относится к окружности 1, индекс “2” – к окружности 2. В формулах (3) величины $\mu_1^{(n)}$, $\mu_2^{(n)}$ и $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$ определяются на основании теоремы об инверсии диполей относительно окружности по формулам (2). Рекуррентные формулы для этих величин можно записать в виде следующих формул (рис. 1):

$$f_1^{(n)} = f_1 + \frac{a_1^2}{f_2^{(n-1)} - f_1}, f_2^{(n)} = f_2 - \frac{a_2^2}{f_1^{(n-1)} - f_2}, \mu_1^{(n)} = \frac{\mu_2^{(n-1)} a_1^2}{(f_2^{(n-1)} - f_1)^2}, \mu_2^{(n)} = \frac{\mu_1^{(n-1)} a_2^2}{(f_1^{(n-1)} - f_2)^2}$$

При $n=1$ имеем $f_1^{(0)} = f_1, f_2^{(0)} = f_2, \mu_1^{(0)} = \mu_2$ и $\mu_2^{(0)} = \mu_1$, а модули диполей равны $\mu_1 = |V_\infty| a_1$, $\mu_2 = |V_\infty| a_2$.

Производная от комплексного потенциала по комплексной переменной определяет сопряженную скорость

$$\frac{dW}{dz} = \bar{V} = V_x - iV_y, \quad (4)$$

где V_x и V_y – компоненты скорости по соответствующим осям.

Определенные таким образом компоненты скорости V_x и V_y используются для вычисления правых частей СЛАУ, полученной для панельного метода

$$[A][X]=[R],$$

где $[A]$ – матрица аэродинамического влияния для произвольного контура; $[X]$ – вектор-столбец неизвестных плотностей интенсивностей распределенных источников; $[R]$ – правые части, которые вычисляются с учетом компонент скорости, полученных при решении задачи (1)-(4).

3 *Результаты расчетов.* На рис. 2 представлен расчет потенциального течения около двух круговых контуров, расположенных на расстоянии $0,001a$ друг от друга, по описанному методу. На этом рисунке показаны линии тока и зависимость вертикальной составляющей скорости V_y . На рис. 3 приведены расчетные линии тока, полученные при моделировании потенциального обтекания эллипса с коэффициентом сжатия, равным $0,4$ и двух круговых контуров, расположенных от вертикальной оси симметрии эллипса на расстоянии $3,0$ радиуса и выше горизонтальной оси симметрии эллипса на $1,25$ радиуса. Эллиптический контур заменялся 100 панелями, а круговые контуры учитывались в панельном методе согласно математической модели, изложенной выше. Линии тока строились путем интегрирования дифференциальных уравнений для линий тока по методу Эйлера. Шаг интегрирования был постоянным и равным $0,001$.

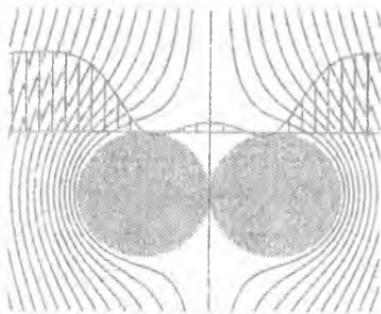


Рис. 2

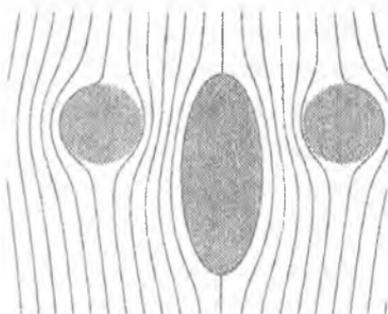


Рис. 3

Поскольку в предлагаемом расчетном методе условия непротекания строго выполняются только на произвольном контуре, а на цилиндрах – приближенно, произведем оценку точности метода. Для этих целей на рис. 4 представлены зависимости изменения среднеквадратичной ошибки RMS , подсчитанной на образующих круговых контуров через $0,5$ градуса в зависимости от относительного расстояния кругового контура от вертикальной оси симметрии

рии комбинации $\frac{x}{R}$. Результат соответствует случаю, когда все три круговых контура имеют общую горизонтальную ось симметрии, которая совпадает с координатной осью OX; r – радиус внешних круговых контуров, R – радиус центрального контура.

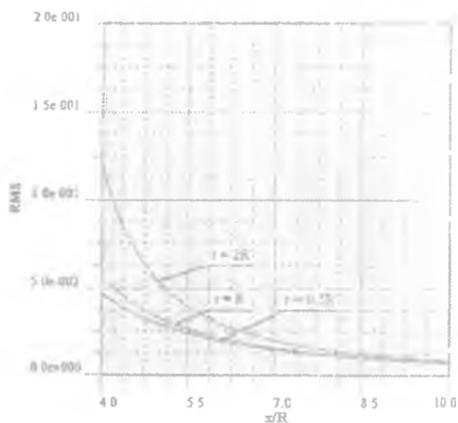


Рис. 4

Из рис. 4 следует, что погрешность возрастает при увеличении радиуса внешних круговых контуров по отношению к радиусу центрального контура. Также следует отметить, что вычисленная среднеквадратичная погрешность мала и для $x/R \geq 5,5$ не превышает 4 % для всех рассмотренных комбинаций. Приведенные результаты по среднеквадратичной погрешности на круговых контурах, где не точно выполняются условия непротекания, дают возможность оценить интегральную точность метода в целом. На основании теоремы о максимуме можно ожидать, что максимальная относительная погрешность будет отмечаться на образующих круговых контуров и в зависимости от размеров и взаимного расположения контуров может как превышать, так и быть меньше погрешности, приведенной на рис. 4. Для примера, на рис. 5 показано сравнение двух расчетных зависимостей изменения вертикальной составляющей скорости V_y , рассчитанной вдоль горизонтальной линии, как показано на рис. 5. Сплошная линия соответствует расчету по панельному методу, когда каждый круговой контур заменялся 100 панелями, а точками показан расчет по предложенному методу, в котором центральный контур заменялся 100 панелями, а правый и левый контура моделировались методом взаимного отражения диполей, как было описано выше. Расстояние между центрами одинаковых круговых контуров с радиусами r равнялось $4r$.

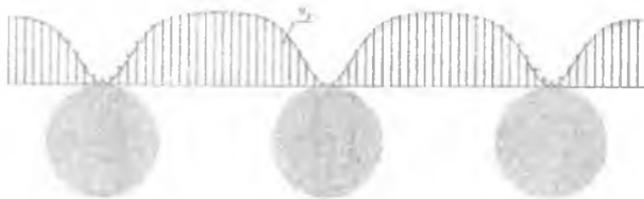


Рис 5

Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможном применении предложенного модифицированного панельного метода для приближенных расчетов потенциальных течений около различных комбинаций произвольного и двух круговых контуров. Можно прогнозировать приблизительный выигрыш компьютерного времени в 27 раз (в случае использования методов исключения) и в 9 раз (в случае итерационных методов) по сравнению с традиционным использованием панельного метода для трех таких же контуров. Следует заметить, что такой выигрыш соответствует однократному расчету. Если же требуется выполнить серию расчетов, в которых параметрами могут служить радиусы круговых контуров или расстояния этих контуров от произвольного тела, то при использовании метода факторизации для решения СЛАУ и изменении только их правых частей, можно получить значительный выигрыш во времени счета. Такие ситуации могут возникнуть при решении различных оптимизационных задач, в которых модель потенциального обтекания трех контуров является одной из многих используемых моделей. Что же касается точности вычислений, то, как показали расчеты, если расстояние от геометрического центра произвольного контура больше четырех его полуосей, то погрешность вычисления поля скоростей мала и для круговых контуров, не превышающих по размерам контур с произвольной образующей, составляет примерно 5%, что может быть достаточным для многих приближенных расчетов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука. – 1988.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т.: Т. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т. 2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991.

4. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964

УДК 533.6.011.5, 533.6.011.72

Чернышов М.В.

АНАЛИЗ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОУГОЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Введение. На сторонах многоугольных профилей, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, возникают так называемые ударно-волновые системы – последовательности скачков уплотнения и волн Прандтля-Майера. Исследования ударно-волновых систем [1-3] показали, что различные параметры газа за ними могут принимать экстремальные значения, и это можно использовать для решения конкретных технических задач. Экстремальными свойствами обладают и системы, углы поворота на элементах (скачках и волнах) которых ограничены, например, особенностями формы обтекаемых тел.

Методы математического программирования, использованные ранее для построения экстремальных систем, применяются в данной работе для анализа аэродинамических коэффициентов простых треугольных и четырехугольных профилей в сверхзвуковом потоке невязкого газа. Получен ряд новых аналитических результатов.

1. Коэффициенты давления на сторонах многоугольных профилей (рис.1,а-в) выражаются через интенсивности (отношения давлений) возникающих скачков и волн.

Действительно, коэффициент давления на i -ой стороне профиля

$$c_{pi} = \frac{2(p_i - p)}{\rho V^2} = \frac{2p}{\rho V^2} \left(\frac{p_i}{p} - 1 \right) = \frac{2a^2}{\gamma V^2} \left(\prod_k J_k - 1 \right) = \frac{2}{\gamma M^2} \left(\prod_k J_k - 1 \right). \quad (1)$$

Здесь k_i - обозначение тех скачков и волн, которые проходит линия тока перед обтеканием i -ой стороны; величины без индексов относятся к невозмущенному потоку, а вели-