УДК 531.0:629.19

Горелов Ю Н., Горелова О.И., Мантуров А.И.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРАВЛЯЕМОЙ ПОДВИЖНОЙ АНТЕННЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Введение. Одной из основных задач современных КА является оперативная доставка полученной информации на Землю. Для этого используется радиолиния КА – ППИ (пункт приема информации); обычно это либо наземные ППИ, либо спутники-ретрансляторы (СР). Объемы передаваемой информации требуют высокой пропускной способности радиолинии КА–ППИ (или СР), что приводит к использованию управляемых подвижных антенных устройств (АУ) с достаточно "узкими" диаграммами направленности. Нормальная работа системы программного наведения подвижного АУ требует знания характеристик текущей ориентации в пространстве и(или) относительно КА линии визирования (ЛВ) КА – ППИ, поскольку наведение АУ заключается в совмещении оси диаграммы направленности этого АУ с ЛВ на заданном интервале $[t_0, t_f]$ планируемого сеанса связи. В качестве исходных данных для решения такой задачи предполагаются данные, получаемые непосредственно на борту КА. Это могут быть: во-первых, прогнозируемые значения параметров движения его центра масс – $\boldsymbol{r}_{KA}(t)$ и $\boldsymbol{v}_{KA}(t)$; во-вторых, соответствующие кинематические характери-стики движения ППИ в пространстве, например $\boldsymbol{r}_{ППИ}(t)$ и $\boldsymbol{v}_{ППИ}(t)$, включая сюда и случай, когда ППИ – СР, находящийся на геостационарной или на высокоэллиптической орбите.

Пусть движение КА и ППИ задается кинематическими уравнениями

$$\boldsymbol{r}_{KA} = \boldsymbol{r}_{KA}(t), \quad \boldsymbol{r}_{ППИ} = \boldsymbol{r}_{ППИ}(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f], \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}_{KA}$ и $\boldsymbol{r}_{ППИ}$ – радиус-векторы КА и ППИ в некоторой базовой системе координат (БСК). Тогда положение линии визирования КА – ППИ в пространстве в каждый момент времени будет задаваться вектором $\boldsymbol{r}_{ЛВ} = \boldsymbol{r}_{ППИ} - \boldsymbol{r}_{KA}$ или, что то же самое, ортом

$$\boldsymbol{e}_{ЛВ} = \boldsymbol{r}_{ЛВ}/r_{ЛВ}, \quad r_{ЛВ} = |\boldsymbol{r}_{ЛВ}|, \tag{2}$$

компоненты которого суть направляющие косинусы ЛВ или первая группа кинематических характеристик ЛВ, необходимых для решения задачи наведения АУ.

Остальные кинематические характеристики ЛВ связаны: во-первых, с быстротой изменения ориентации орта $e_{ЛВ}$ в пространстве, определяемой вектором мгновенной угловой скорости ЛВ – $\omega_{ЛВ}$; во-вторых, с быстротой изменения $\omega_{ЛВ}$ или мгновенным угловым ускорением ЛВ, определяемым как: $\varepsilon_{ЛВ} = \dot{\omega}_{ЛВ}$. Перечисленные характеристики ЛВ полностью определяют ее пространственное движение в БСК. Однако, для решения задачи наведения АУ необходимо знание текущей ориентации ЛВ в какой-либо системе координат, связанной непосредственно с КА (далее ССК). Пусть БСК является неподвижной и, соответственно, $e_{ЛВ}$, $\omega_{ЛВ}$ и $\varepsilon_{ЛВ}$ суть кинематические характеристики ЛВ в абсолютном движении. Тогда и в подвижной ССК также следует ввести соответствующие кинематические характеристики ЛВ (в относительном движении) в виде $\tilde{e}_{ЛВ}$, $\tilde{\omega}_{ЛВ}$ и $\tilde{\varepsilon}_{ЛВ}$. Ясно, что $e_{ЛВ} = \tilde{e}_{ЛВ}$, если эти орты заданы своими компонентами в одной и той же системе координат, но в общем случае $\omega_{ЛВ} \neq \tilde{\omega}_{ЛВ}$ и $\varepsilon_{ЛВ} \neq \tilde{\varepsilon}_{ЛВ}$.

Очевидно, что для решения задачи наведения АУ на ППИ необходимо, в конечном счете, знание $\forall t \in [t_0, t_f]$ кинематических характеристик подвижного (относительно корпуса КА) АУ в виде текущих углов поворота АУ, реализуемых его опорно-поворотным устройством (ОПУ), и их производных – угловых скоростей и ускорений по соответствующим каналам управления в режиме наведения АУ на ППИ.

В настоящей статье приведено решение задачи кинематики сложного движения ЛВ КА–ППИ в виде общих соотношений для расчета кинематических характеристик ЛВ и управляемого подвижного АУ.

1. **Кинематические характеристики ЛВ.** Рассматривая движение КА и ППИ (1), вначале определим вектор $e_{ЛВ}$ (2) – одну из характеристик ЛВ в ее абсолютном движении (в БСК), а затем – векторы $\omega_{ЛВ}$ и $\varepsilon_{ЛВ}$. Очевидно, что $\omega_{ЛВ}$ можно определить как вектор, пропорциональный секторной скорости вектора $e_{ЛВ}$ и равный:

$$\omega_{ЛВ} = \frac{1}{r_{ЛВ}} e_{ЛВ} \times v_{ЛВ}, \qquad (3)$$

где $v_{ЛВ} = \dot{r}_{ЛВ} = v_{ППИ} - v_{КА}$. Очевидно, что $e_{ЛВ} \cdot \omega_{ЛВ} = 0$.

Вычисляя далее производную от $\omega_{ЛВ}$, получим мгновенное угловое ускорение ЛВ. Дифференцируя выражение для $\omega_{ЛВ}$ и учитывая, что $\dot{r}_{ЛВ} = \boldsymbol{e}_{ЛВ} \cdot \boldsymbol{v}_{ЛВ}$, $\dot{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} = \boldsymbol{\omega}_{ЛВ} \times \boldsymbol{e}_{ЛВ}$, $\dot{\boldsymbol{v}}_{ЛВ} = \boldsymbol{w}_{ЛВ}$, получим с учетом (3) следующее выражение для $\varepsilon_{ЛВ}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ЛВ} = -\frac{2(\boldsymbol{e}_{ЛВ} \cdot \boldsymbol{v}_{ЛВ})}{r_{ЛВ}} \boldsymbol{\omega}_{ЛВ} + \frac{1}{r_{ЛВ}} \boldsymbol{e}_{ЛВ} \times \boldsymbol{w}_{ЛВ}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{w}_{ЛВ} = \dot{\boldsymbol{v}}_{ЛВ} = \dot{\boldsymbol{v}}_{ППИ} - \dot{\boldsymbol{v}}_{КА}$. Нетрудно установить, что $\boldsymbol{e}_{ЛВ} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ЛВ} \equiv 0$.

Определим теперь кинематические характеристики ЛВ в относительном движении, то есть в случае, когда движение КА и ППИ задается кинематическими уравнениями

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}_{КА} = \widetilde{\boldsymbol{r}}_{КА}(t); \quad \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ППИ} = \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ППИ}(t), \tag{5}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{r}}_{КА}$ и $\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ППИ}$ – радиус-векторы КА и ППИ в некоторой подвижной системе координат (ПСК), движение которой относительно БСК будем считать заданным. Здесь требуется указать, исходя из (5), во-первых, точные соотношения для определения кинематических характеристик ЛВ в ее относительном движении, и, во-вторых, связь этих характеристик с кинематическими характеристиками ЛВ в абсолютном движении (в БСК).

Вычислим по аналогии с (2) - (4) искомые характеристики:

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ЛВ}/r_{ЛВ}, \quad r_{ЛВ} = \left|\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ЛВ}\right|, \quad \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ППИ} - \widetilde{\boldsymbol{r}}_{КА}; \tag{6}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ЛВ} = \frac{1}{r_{ЛВ}} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} \times \widetilde{\boldsymbol{v}}_{ЛВ}, \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_{ЛВ} = \dot{\widetilde{\boldsymbol{r}}}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_{ППИ} - \widetilde{\boldsymbol{v}}_{КА}, \tag{7}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ЛВ} = -\frac{2(\widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_{ЛВ})}{r_{ЛВ}} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ЛВ} + \frac{1}{r_{ЛВ}} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} \times \widetilde{\boldsymbol{w}}_{ЛВ}, \quad \widetilde{\boldsymbol{w}}_{ЛВ} = \dot{\widetilde{\boldsymbol{v}}}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{w}}_{ППИ} - \widetilde{\boldsymbol{w}}_{КА}, \tag{8}$$

где $\dot{\widetilde{\boldsymbol{r}}}_{ЛВ}$, $\dot{\widetilde{\boldsymbol{v}}}_{ЛВ}$ – соответствующие локальные производные (в ПСК).

Установим теперь взаимосвязь между кинематическими характеристиками ЛВ в относительном и абсолютном движении. Для этого зададим движение ПСК: положение ее начала в БСК определим радиус-вектором $\boldsymbol{r}_O$, а движение – вектором скорости $\boldsymbol{v}_O = \dot{\boldsymbol{r}}_O$ и вектором ускорения $\boldsymbol{w}_O = \dot{\boldsymbol{v}}_O$ (здесь производные от $\boldsymbol{r}_O$ и $\boldsymbol{v}_O$ абсолютные, т.е. вычисляются в БСК); текущую ориентацию ПСК в БСК определим матрицей перехода для векторов от ПСК к БСК– $\boldsymbol{P}_{ПСК}^{БСК}$, а ее вращательное движение – вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{ПСК}$ и вектором углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_{ПСК}$. Так как $\boldsymbol{r}_{КА} = \boldsymbol{r}_O + \widetilde{\boldsymbol{r}}_{КА}$, $\boldsymbol{r}_{ППИ} = \boldsymbol{r}_O + \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ППИ}$, то $\boldsymbol{r}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ЛВ}$ и

$\boldsymbol{e}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ}$. Последнее означает тождественность указанных векторов, когда они задаются своими компонентами в одной и той же системе координат: либо в БСК, либо в ПСК. Если же $\boldsymbol{e}_{ЛВ} = \boldsymbol{e}_{ЛВ}^{БСК}$, а $\widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ}^{ПСК}$, то тогда: $\boldsymbol{e}_{ЛВ}^{БСК} = \boldsymbol{P}_{ПСК}^{БСК} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ}^{ПСК}$.

Кроме того, $\boldsymbol{\omega}_{ПСК} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ПСК}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{ПСК} = \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ПСК}$.

Поскольку $\boldsymbol{v}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{v}}_{ЛВ} + \boldsymbol{\omega}_{ПСК} \times \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ЛВ}$ и $\boldsymbol{w}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{w}}_{ЛВ} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ПСК} \times \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ЛВ} + 2\boldsymbol{\omega}_{ПСК} \times \widetilde{\boldsymbol{v}}_{ЛВ} + \boldsymbol{\omega}_{ПСК} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ПСК} \times \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ЛВ}\right)$, то с учетом (3), (4) и (7), (8) получим

$$\boldsymbol{\omega}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ЛВ} + \boldsymbol{\omega}^{Trans}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\omega}^{Trans} \triangleq \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} \times \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ПСК} \times \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ}\right)$ – компонент угловой скорости ПСК, ортогональный ЛВ (переносная угловая скорость ЛВ, обусловленная вращением ПСК);

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ЛВ} = \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ЛВ} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ЛВ}^{Trans} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ЛВ}^{Rotor}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{ЛВ}^{Trans} = \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} \times \left(\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ПСК} \times \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ}\right) + \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ПСК} \times \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ПСК} \times \widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ}\right)\right]$ – компонент-аналог пере-носного углового ускорения ЛВ, а $\boldsymbol{\varepsilon}_{ЛВ}^{Rotor} \triangleq -\dfrac{2(\widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ПСК})}{r_{ЛВ}}\left[\widetilde{\boldsymbol{v}}_{ЛВ} - (\widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_{ЛВ})\widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ}\right]$ – компонент-аналог поворотного (кориолисова) углового ускорения ЛВ.

Соотношения (9), (10) выражают собой соответствующие теоремы о сложении угловых скоростей и угловых ускорений ЛВ в ее сложном движении.

2. **Кинематические характеристики управляемого АУ.** Для расчета кинематических характеристик управляемого подвижного АУ, исходя из кинематических характеристик ЛВ, заданных в ССК, предположим, что вращение АУ относительно корпуса КА осуществляется с помощью двухстепенного ОПУ. Пусть с АУ, как твердым телом, связана антенная система координат (АСК), одна из осей которой параллельна оси диаграммы направленности АУ, задаваемой ортом $\widetilde{\boldsymbol{s}}_{АУ}$, а в исходном положении АСК совпадает с ССК. Здесь и далее ССК – аналог БСК, а АСК – аналог ПСК (см. п.1). В режиме наведения АУ на ППИ орт $\widetilde{\boldsymbol{s}}_{АУ}$ совмещается с ортом $\widetilde{\boldsymbol{e}}_{ЛВ}^{АСК} = \boldsymbol{P}_{ССК}^{АСК} \boldsymbol{e}_{ЛВ}^{ССК}$, где $\boldsymbol{P}_{ССК}^{АСК} = \boldsymbol{P}_{ССК}^{АСК}(\vartheta, \varphi)$ – соответствующая матрица перехода, а ϑ – угол первого поворота АУ вокруг фиксированной в ССК оси, задаваемой ортом $\boldsymbol{c}_{\vartheta}^{ССК}$ (канал управления по углу ϑ); φ – угол второго поворота АУ вокруг фиксированной в АСК оси, задаваемой ортом $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\varphi}^{АСК}$ (канал управления по углу φ). Если для ОПУ

принять, что $c_\vartheta^{CCK} = (0,0,1)$; $c_\varphi^{ACK} = (0,-1,0)$, то углы поворота АУ можно определить, исходя из $\widetilde{e}_{ЛВ}^{ACK} = P_{CCK}^{ACK}(\vartheta,\varphi)\, e_{ЛВ}^{CCK}$ при выполнении условия $\widetilde{s}_{AУ} = \widetilde{e}_{ЛВ}^{ACK}$.

В общем случае допустимые углы поворота АУ определяются следующими парами:

$$\vartheta = \widetilde{\vartheta} + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \varphi = \widetilde{\varphi}; \tag{11а}$$

$$\vartheta = \widetilde{\vartheta} + \pi(2k+1),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \varphi = \pi \cdot sign(e_z) - \widetilde{\varphi}, \tag{11б}$$

где $sign(\cdot)$ – знаковая функция, а $\widetilde{\vartheta}$ и $\widetilde{\varphi}$ – углы поворота АУ:

$$sin\,\widetilde{\vartheta} = e_y\left(e_x^2 + e_y^2\right)^{-\frac{1}{2}};\ cos\widetilde{\vartheta} = e_x\left(e_x^2 + e_y^2\right)^{-\frac{1}{2}},\ \text{где}\ 0 \le \widetilde{\vartheta} \le +2\pi; \tag{12а}$$

$$sin\,\widetilde{\varphi} = e_z,\ cos\,\widetilde{\varphi} = \sqrt{1 - e_z^2} = \sqrt{e_x^2 + e_y^2},\ \text{где}\ -\tfrac{\pi}{2} \le \widetilde{\varphi} \le +\tfrac{\pi}{2}. \tag{12б}$$

Выбор реализуемой пары текущих углов поворота АУ в заданном сеансе связи осуществляется с учетом конструктивных ограничений ОПУ и допустимых положений $s_{AУ}$ в ССК.

Для вычисления остальных кинематических характеристик АУ можно воспользоваться как соотношениями (12), так и указанными выше теоремами кинематики сложного движения ЛВ (9), (10). К ним относятся, помимо углов поворотов АУ ϑ, φ, производные: $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\vartheta}$, $\ddot{\varphi}$. Если АСК вращается с угловой скоростью $\omega_{AУ}$ и угловым ускорением $\varepsilon_{AУ}$:

$$\omega_{AУ} = \dot{\vartheta} c_\vartheta + \dot{\varphi} c_\varphi;\ \varepsilon_{AУ} = \ddot{\vartheta} c_\vartheta + \ddot{\varphi} c_\varphi + \dot{\vartheta}\dot{\varphi}\, c_\vartheta \times c_\varphi, \tag{13}$$

то с учетом $\widetilde{\omega}_{ЛВ}(t) \equiv 0$, $\widetilde{\varepsilon}_{ЛВ}(t) \equiv 0$ из (9) и (10) получим:

$$\omega_{ЛВ} = e_{ЛВ} \times \left(\omega_{AУ} \times e_{ЛВ}\right); \tag{14}$$

$$\varepsilon_{ЛВ} = e_{ЛВ} \times \left(\varepsilon_{AУ} \times e_{ЛВ}\right) + e_{ЛВ} \times \left[\omega_{AУ} \times \left(\omega_{AУ} \times e_{ЛВ}\right)\right]. \tag{15}$$

Здесь определяемые величины суть $\omega_{AУ}$ и $\varepsilon_{AУ}$, а с учетом (13) - $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\vartheta}$, $\ddot{\varphi}$.

С учетом первого соотношения (13) из (14) следует:

$$\omega_{ЛВ} = \dot{\vartheta} c_\vartheta + \dot{\varphi} c_\varphi - \dot{\vartheta}\left(c_\vartheta \cdot e_{ЛВ}\right) e_{ЛВ}.$$

Разрешая это уравнение относительно неизвестных, получим

$$\dot{\vartheta} = \omega_z\left(1 - e_z^2\right)^{-\frac{1}{2}},\quad \dot{\varphi} = (\omega_x e_y - \omega_y e_x)\left(e_x^2 + e_y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{16}$$

То же самое получается и при непосредственном дифференцировании выражений (12). Из (15) с учетом выражений для $\omega_{AУ}$ и $\varepsilon_{AУ}$ (13) можно получить:

$$\varepsilon_{Л\,В}= \ddot{\vartheta}\left(c_{\vartheta} - e_z e_{Л\,В}\right) + \ddot{\varphi}\, c_{\varphi} + \dot{\vartheta}^2\, e_z\, e_{Л\,В} \times c_{\vartheta} +$$
$$\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\left(c_{\vartheta} \times c_{\varphi} - \sqrt{e_x^2 + e_y^2}\; e_{Л\,В} - e_z\, e_{Л\,В} \times c_{\varphi}\right).$$

Решая это уравнение с учетом (16), можно найти выражения для $\ddot{\vartheta}$ и $\ddot{\varphi}$, которые также получаются и при непосредственном дифференцировании соотношений (16).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Управление космическими аппаратами зондирования Земли: Компьютерные технологии. // Д.И. Козлов, Г.П. Аншаков, Я.А. Мостовой, А.В. Соллогуб. М.: Машиностроение, 1998.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990.