УДК 629.78

Фадеенков П.В.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ С ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ

Оптимизация перелетов заключается в определении проектных и баллистических параметров космического аппарата (КА), доставляющих максимум какому-либо из критериев – массе полезного груза, времени перелета, стоимости. Для упрощения поиска решения общая задача разделяется на динамическую и параметрическую части. Динамическая часть чаще всего сводится к определению затрат характеристической скорости маневра. Среди предлагаемых вариантов управлений [1], [2], [3] отсутствует вариант совместного изменения большой полуоси, эксцентриситета и наклонения орбиты при трансверсальной ориентации вектора тяги. Двигатели малой тяги работают продолжительное время, что соответствует значительному активному участку на витке.

Запишем систему дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах, не учитывая влияние атмосферы и несферичности Земли:

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= 2\sqrt{\frac{A^3}{\mu\left(1-e^2\right)}}\left[a_y e \sin\vartheta + a_x \left(1+e\cos\vartheta\right) \right],\\
\frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{A\left(1-e^2\right)}{\mu}}\left\{ a_y \sin\vartheta + a_x\left[\left(1+\frac{1}{1+e\cos\vartheta}\right)\cos\vartheta + \frac{e}{1+e\cos\vartheta}\right]\right\},\\
\frac{di}{dt} &= \sqrt{\frac{A\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{a_z\cdot\cos u}{1+e\cos\vartheta},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \sqrt{\frac{A\left(1-e^2\right)}{\mu}}\frac{a_z\cdot\sin u}{(1+e\cos\vartheta)\cdot\sin i},\\
\frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{A\left(1-e^2\right)}{\mu}}\left[-a_y\frac{\cos\vartheta}{e} + \frac{a_x}{e}\left(1+\frac{1}{1+e\cos\vartheta}\right)\sin\vartheta - a_z\cdot e\cdot\frac{\sin u\cdot ctg i}{1+e\cos\vartheta}\right],\\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \sqrt{\frac{A\left(1-e^2\right)}{\mu}}\left[\frac{\mu\left(1+e\cos\vartheta\right)^2}{A^2\left(1-e^2\right)^2} + a_y\frac{\cos\vartheta}{e} - \frac{a_x}{e}\left(1+\frac{1}{1+e\cos\vartheta}\right)\sin\vartheta\right],\\
\frac{dV_x}{dt} &= a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} = a_0\exp\left(\frac{V_x}{C}\right).
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь A – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклонение, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра, ϑ – истинная аномалия, u – аргумент широты, $a_0 = P/M_0$ – начальное ускорение, P – тяга двигательной установки, M_0 – начальная масса КА, C – скорость истечения рабочего тела, $\mu = 398600$ км^3/с^2 – гравитационная постоянная.

Пусть тяга двигателя постоянна и направлена так, что ее радиальная составляющая равна нулю. Тогда направление вектора тяги можно задать одной величиной – углом θ между перпендикуляром к радиусу-вектору в плоскости орбиты и вектором тяги. Запишем составляющие реактивного ускорения:

$$\begin{aligned} &a_x = \delta \cdot a \cdot \cos\theta, \\ &a_y = 0, \\ &a_z = \delta \cdot a \cdot \sin|\theta| \cdot sign(\cos u), \\ &u_0 = \vartheta + \omega = \vartheta_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где θ – угол отклонения вектора тяги от плоскости орбиты.

В моменты u = π/2 направление тяги меняется на симметричное относительно плоскости орбиты, δ – функция включения двигателей:

- центр активного участка в перигее

$$\delta = \begin{cases} 1, -\alpha \le u \le \alpha, \\ 0, \alpha < u < 2\pi - \alpha, \end{cases} \tag{3}$$

- центр активного участка в апогее

$$\delta = \begin{cases} 1, \pi - \alpha \le u \le \pi + \alpha, \\ 0, \alpha - \pi < u < \pi - \alpha, \end{cases} \tag{4}$$

где α – половина ширины разгонного участка, который расположим симметрично относительно линии узлов.

Перейдем к новой независимой переменной – эксцентрической аномалии и проведем процедуру усреднения.

Оси апсид начальной, переходной и конечной орбит совпадают с линиями узлов и лежат в плоскости экватора:

$$\omega_0 = 0, \tag{5}$$

где ω_0 – аргумент перигея в начальный момент времени.

Перейдем к новой независимой переменной – эксцентрической аномалии, учитывая, что использование тяги не приводит к существенному уходу оси апсид:

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{A^3}} \left(1 - e \cdot \cos E\right)^{-1}, \tag{6}$$

где E – эксцентрическая аномалия.

Общая формула процедуры усреднения имеет вид:

$$\frac{d\tilde{x}}{dE}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{dE}dE\,, \tag{7}$$

где x – фазовая переменная, $\tilde{x}$ – усредненная фазовая переменная.

Согласно предложенной структуре управления введем угол α – половина ширины разгонного участка и будем считать этот угол постоянным.

Таким образом, формула процедуры усреднения в зависимости от положения центра активного участка преобразуется:

$$\begin{aligned}&\frac{d\tilde{x}}{dE}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dx}{dE}dE \text{ – для перигея,}\\&\frac{d\tilde{x}}{dE}=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha}\frac{dx}{dE}dE \text{ – для апогея.}\end{aligned} \tag{8}$$

Получим следующую систему усредненных уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{dA}{dE}=\frac{2}{2\pi}\cdot a\cos\theta\frac{A^3}{\mu}\sqrt{1-e^2}\cdot 2\alpha,\\&\frac{de}{dE}=\frac{1}{2\pi}a\cos\theta\frac{A^2}{\mu}\sqrt{1-e^2}\left(\pm 4\sin\alpha-3e\alpha-\frac{e\cdot\sin 2\alpha}{2}\right),\\&\frac{di}{dE}=\frac{1}{2\pi}a\sin\theta\frac{A^2}{\mu\sqrt{1-e^2}}f_1(e,\alpha),\\&\frac{d\Omega}{dE}=0,\\&\frac{d\omega}{dE}=0,\\&\frac{dV_x}{dE}=\frac{1}{2\pi}a\sqrt{\frac{A^3}{\mu}}(2\alpha+2e\sin\alpha),\end{aligned} \tag{9}$$

где "+" – перигей, "-" – апогей.

Первые два уравнения могут быть проинтегрированы:

$$\begin{aligned}&A\cdot(\sin\alpha\pm e\cdot k_1)^{k_1}=const,\\&k_1=\frac{3}{4}\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{8},\end{aligned} \tag{10}$$

где "+" – перигей, "-" – апогей.

Определим оптимальную программу изменения угла θ.

Система (8) может быть уменьшена на три уравнения. Эксцентрическая аномалия отсутствует в уравнениях, не влияет на управление и при отсутствии ограничений на длительность перелета может быть исключена из системы. Перейдем к новой независимой переменной V_x:

$$\frac{de}{dV_x} = \cos\theta \cdot \sqrt{\frac{A \cdot (1-e^2)}{\mu}} \cdot \frac{f_2(e,\alpha)}{2 \cdot (\alpha + e \cdot \sin\alpha)},$$
$$\frac{di}{dV_x} = \sin\theta \cdot \sqrt{\frac{A}{\mu \cdot (1-e^2)}} \cdot \frac{f_1(e,\alpha)}{2 \cdot (\alpha + e \cdot \sin\alpha)} \tag{11}$$

В соответствии с общим алгоритмом принципа максимума Понтрягина составим гамильтониан системы:

$$H = \frac{de}{dV_x}\Psi_e + \frac{di}{dV_x}\Psi_i - \Psi_{V_x}, \tag{12}$$

где $\Psi_e, \Psi_i, \Psi_{V_x}$ – сопряженные множители.

Уравнения для сопряженных множителей имеют вид:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial i} = 0,$$
$$\dot{\psi}_{V_x} = -\frac{\partial H}{\partial V_x} = 0, \tag{13}$$
$$\dot{\psi}_e = -\frac{\partial H}{\partial e}.$$

Значит, два сопряженных множителя на всей оптимальной траектории постоянны.

Управление определится в явном виде из условия:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \tag{14}$$

$$ctg\theta = \frac{(1-e^2) \cdot f_2(e,\alpha) \cdot \Psi_e}{f_1(e,\alpha) \cdot \Psi_i}. \tag{15}$$

После подстановки в H с учетом, что $\Psi_i = const$, получим:

$$\frac{1}{\sin\theta} \cdot \sqrt{\frac{A}{\mu \cdot (1-e^2)}} \cdot f_1(e,\alpha) = const. \tag{16}$$

Управление зависит только от фазовых переменных. Постоянная может быть определена подбором начального угла отклонения вектора тяги от плоскости орбиты и интегрированием системы (1) для заданных граничных условий.

Проведем моделирование перелета с круговой орбиты радиуса 6571 км на геостационарную орбиту с разницей наклонения 51,7°. Пусть перелет состоит из трех участков, в целом повторяющий классический трехимпульсный перелет: первый участок – увеличение большой полуоси и эксцентриситета, второй – совместное изменение всех параметров, третий – уменьшение большой полуоси и эксцентриситета. Результаты моделирования приведены в таблице 1.

Таблица 1 Сравнение затрат характеристической скорости

Показатель сравнения	Импульсная теория	Перелет с продолжительным активным участком	Δ, %
А0 / е0	6571 / 0	6571 / 0	-
А1 / е1	58416,4 / 0,8875	58416,4 / 0,8868 α= 15°	0,08
Vx1, км/с	2,912	2,926	0,49
А2 / е2 (Δi = 51,7°)	76251.4 / 0,446	76251.4 / 0,448 α=2°, θ_0=105°	0,45
Vx2, км/с	0,679	1,176	73,2
А3 / е3	42241 / 0	42241 / 0,00385 α =1°	0.38
Vx3, км/с	0,622	0.620	0,34

Из таблицы видно, что продолжительный активный участок не приводит к существенному увеличению затрат характеристической скорости при изменении параметров в плоскости орбиты и сильно зависит от разницы наклонений начальной и конечной орбит.

Библиографический список

1. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой // Математические методы в динамике космических аппаратов. М., 1968, Вып.5.
2. Ишков С.А., Романенко В.А. Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования, - 1997. Т.XXXVI. Вып.2. - С.11-20.
3. Ишков С.А. Расчет оптимальных межорбитальных перелетов с малой тягой между круговой и эллиптической орбитами // Космические исследования, - 1997. Т.XXXVI. Вып.2. - С.1-10.