УДК 629.78

Старинова О.Л., Матерова И.Л.

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПОЛЁТА К ЛУНЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

Рассматривается задача об оптимальном по расходу рабочего тела (РТ) перелёте космического аппарата (КА) с двигателем малой тяги на селеноцентрическую орбиту. КА выводится на геоцентрическую круговую орбиту ракетой-носителем. Плоскость орбиты КА не совпадает со средней плоскостью движения Луны (рис. 1).

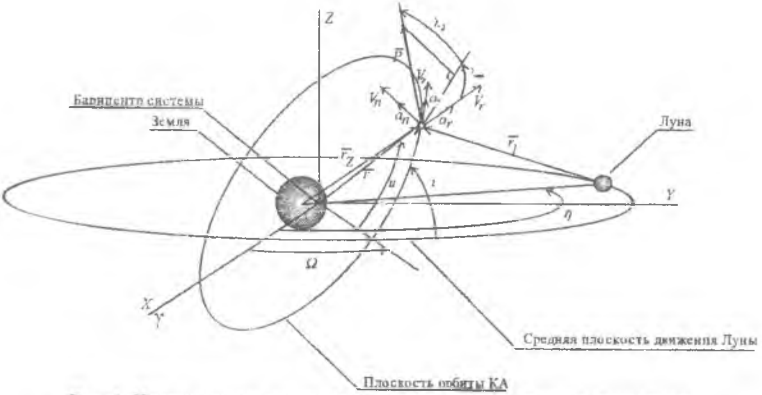


Рис. 1. Инерциальная полярная барицентрическая система координат

Пространственные уравнения движения КА в рамках ограниченной задачи трёх тел (Земля, Луна, КА) имеют вид:

$$\frac{dr}{dt}=V_r, \qquad \frac{du}{dt}=\frac{V_\varphi}{r}-\frac{\cos i\ \sin u\ \sin\lambda_2\ a}{\sin i\, V_\varphi}+\left(f_{nl}+f_{nz}\right)\frac{\cos i\ \sin u}{\sin i\, V_\varphi},$$

$$\frac{dV_r}{dt}=\frac{V_\varphi^2}{r}+f_{rz}+f_{rl}+\cos\lambda_2\ \cos\lambda_1\ ,$$

$$\frac{dV_\varphi}{dt}=-\frac{V_r V_\varphi}{r}+f_{\varphi z}+f_{\varphi l}+\cos\lambda_2\ \sin\lambda_1\ , \qquad (1)$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{\sin u\ \sin\lambda_2\ a}{\sin i\, V_\varphi}+\left(f_{nz}+f_{nl}\right)\frac{\sin u}{\sin i\, V_\varphi},$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{\cos u\ \sin\lambda_2\ a}{V_\varphi}+\left(f_{nz}+f_{nl}\right)\frac{\cos u}{V_\varphi},$$

$$\frac{d\bar{m}}{dt}=\frac{a_0\delta}{c_0}, \qquad a=\frac{a_0\delta}{\left(1-\bar{m}\right)}.$$

Здесь u – аргумент широты КА; r – радиус-вектор КА относительно барицентра; V_r, V_φ - компоненты безразмерного вектора скорости КА относительно барицентра; i - наклонение орбиты КА относительно орбиты Луны; Ω - долгота восходящего узла орбиты КА относительно средней орбиты Луны; a_0 – номинальное безразмерное ускорение от тяги двигателей; c_0 – безразмерная скорость истечения рабочего тела; δ – функция включения-выключения двигателей; $\overline{m} = \dfrac{m_{PT}}{m_0}$ - относительный расход РТ.

В системе (1) $\bar{f}_z = \begin{pmatrix} f_{r\,z} \\ f_{\tau\,z} \\ f_{n\,z} \end{pmatrix}$ - ускорение от притяжения Земли и $\bar{f}_l = \begin{pmatrix} f_{r\,l} \\ f_{\tau\,l} \\ f_{n\,l} \end{pmatrix}$ - ускорение от притяжения Луны в проекциях на оси системы координат OXYZ (рис. 1) определяются зависимостями:

$$\bar{f}_z = \begin{pmatrix} f_{x\,z} \\ f_{y\,z} \\ f_{z\,z} \end{pmatrix} = -(1-\mu_l)\cdot \begin{pmatrix} \dfrac{r\cdot(\cos\Omega\cdot\cos u - \sin\Omega\cdot\cos i\cdot\sin u) + R_z\cdot\cos\eta}{|r_z|^3} \\ \dfrac{r\cdot(\sin\Omega\cdot\cos u - \cos\Omega\cdot\cos i\cdot\sin u) + R_z\cdot\sin\eta}{|r_z|^3} \\ \dfrac{r\cdot\sin i\cdot\sin u}{|r_z|^3} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\bar{f}_l = \begin{pmatrix} f_{x\,l} \\ f_{y\,l} \\ f_{z\,l} \end{pmatrix} = -\mu_l\cdot \begin{pmatrix} \dfrac{r\cdot(\cos\Omega\cdot\cos u - \sin\Omega\cdot\cos i\cdot\sin u) - \cos\eta}{|r_l|^3} \\ \dfrac{r\cdot(\sin\Omega\cdot\cos u - \cos\Omega\cdot\cos i\cdot\sin u) - \sin\eta}{|r_l|^3} \\ \dfrac{r\cdot\sin i\cdot\sin u}{|r_l|^3} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\mu_l \approx 0{,}0123$ – отношение массы Луны к суммарной массе системы Земля-Луна; R_z – положение центра Земли относительно барицентра; η – долгота Луны; безразмерные радиус-вектора Земля-КА $\bar{r}_z$ и Луна-КА $\bar{r}_l$ определяются зависимостями:

$$\bar{r}_z = \begin{pmatrix} r_{r\,z} \\ r_{\tau\,z} \\ r_{n\,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot(\cos\Omega\cdot\cos u - \sin\Omega\cdot\cos i\cdot\sin u) - R_z\cdot\cos\eta \\ r\cdot(\sin\Omega\cdot\cos u - \cos\Omega\cdot\cos i\cdot\sin u) - R_z\cdot\sin\eta \\ r\cdot\sin i\cdot\sin u \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\bar{r}_l = \begin{pmatrix} r_{r\,l} \\ r_{\tau\,l} \\ r_{n\,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot(\cos\Omega\cdot\cos u - \sin\Omega\cdot\cos i\cdot\sin u) - \cos\eta \\ r\cdot(\sin\Omega\cdot\cos u - \cos\Omega\cdot\cos i\cdot\sin u) - \sin\eta \\ r\cdot\sin i\cdot\sin u \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

В проекциях на оси естественной системы координат гравитационные ускорения, действующие на КА, выражаются зависимостями:

$$\bar{f}_z = \begin{pmatrix} f_{r\,z} \\ f_{\tau\,z} \\ f_{n\,z} \end{pmatrix} = -\frac{1-\mu_l}{|r_z|^3}\cdot\begin{pmatrix} r + R_z\cdot(\cos(\eta-\Omega)\cos u + \sin(\eta-\Omega)\sin u\cos i) \\ R_z\cdot(-\cos(\eta-\Omega)\sin u + \sin(\eta-\Omega)\cos u\cos i) \\ -R_z\cdot\sin(\eta-\Omega)\sin i \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$$\bar{f}_l = \begin{pmatrix} f_{r\,l} \\ f_{\tau\,l} \\ f_{n\,l} \end{pmatrix} = -\frac{\mu_l}{|r_l|^3}\cdot\begin{pmatrix} r - R_l\cdot(\cos(\eta-\Omega)\cos u + \sin(\eta-\Omega)\sin u\cos i) \\ R_l(-\cos(\eta-\Omega)\cdot\sin u + \sin(\eta-\Omega)\cos u\cos i) \\ R_l\sin(\eta-\Omega)\sin i \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

С точки зрения влияния тяготения Луны на оптимальные законы управления и траектории движения, интерес представляет поведение аппарата на высоких орбитах, и поэтому рассматривается круговая орбита с большой полуосью a_0 = 100000 км. Будем считать, что после вывода на опорную орбиту КА совершает перелёт на круговую орбиту с радиусом 100000 км и наклонением, равным наклонению средней плоскости движения Луны i ≈ 18°. Этот манёвр осуществляется по известной схеме перелёта между круговыми некомпланарными орбитами. Дальнейшее движение рассматривается в средней плоскости движения Луны. При этом модель (1) – (7) упрощается и преобразуется в систему, описанную в работе [1].

При решении задачи трёх тел в качестве критерия оптимальности будем использовать минимальный расход рабочего тела:

$$m_{PT} = \int_0^T \delta\beta dt \to \min, \qquad (8)$$

где β – секундный расход РТ.

Введём вектор фазовых координат КА $\overline{X} = (r,\ \varphi,\ V_r,\ V_\varphi,\ \overline{m})^T$. Формально задача оптимизации описывается следующим образом: требуется определить вектор функций управления $\overline{u}(t) = (\lambda(t), \delta(t))^T$ из допустимого множества U, удовлетворяющий граничным условиям $\overline{X}(t_0) = \overline{X_0}$, $\overline{X}(T) = \overline{X}_T$ и доставляющий минимум критерию оптимальности m_{PT} при фиксированном векторе проектных параметров $\overline{p} = \{a_0,\ c\}^T$

$$\overline{u}_{opt}(t) = \arg\min_{\overline{u}(t)} m_{PT}\left(\overline{u}|\overline{p} = fixe, \overline{X}_0 = fixe, \overline{X}_K = fixe\right). \qquad (9)$$

В соответствии с формализмом принципа максимума Понтрягина введём вектор сопряжённых переменных $\overline{P} = \left(P_r, \quad P_\varphi, \quad P_{V_r}, \quad P_{V_\varphi}, P_{\overline{m}}\right)^T$ и Гамильтониан $H = \left(\frac{d\overline{X}}{dt}\right)^T \cdot \overline{P}$.

Оптимальное направление вектора ускорения $\lambda_{opt}(t)$ и функции включения-выключения двигателей δ определяется из условия максимума Гамильтониана:

$$\sin\lambda_{opt} = \frac{P_{V_\varphi}}{\sqrt{P_{V_r}^{\ 2} + P_{V_\varphi}^{\ 2}}}, \qquad \cos\lambda_{opt} = \frac{P_{V_r}}{\sqrt{P_{V_r}^{\ 2} + P_{V_\varphi}^{\ 2}}}, \tag{10}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \Delta < 0 \\ 1, & \Delta > 0 \end{cases}, \qquad \Delta = \frac{P_{\overline{m}}}{c} + \frac{\sqrt{P_{V_r}^{\ 2} + P_{V_\varphi}^{\ 2}}}{1 - \overline{m}}. \tag{11}$$

Таким образом, задача об оптимальном по минимизации расхода плоском движении в системе Земля-Луна сводится к двухточечной четырёхпараметрической краевой задаче. Требуется найти такие начальные значения $\lambda_0 = arctg\frac{P_{V_r}}{P_{V_\varphi}}$, $B = \sqrt{P_{V_r}^{\ 2} + P_{V_\varphi}^{\ 2}}$, $P_{\overline{m}}$. P_φ, чтобы на концах оптимальной траектории выполнялись начальное и конечное условия: $\overline{X}(t_0) = \overline{X}_0$, $\overline{X}(T) = \overline{X}_T$.

Пусть стартовая орбита круговая с радиусом $r_0 = 100000$ км и угловое положение КА относительно Луны в начальный момент времени равно φ_0. Вектор фазовых координат КА задаётся значениями

$$\overline{X}_0 = \left(\frac{r_0}{R_Л}, \quad \varphi_0, \quad V_{r0} = 0, \quad V_{\varphi 0} = \sqrt{\frac{R_Л}{r_0}}, \quad \overline{m}_0 = 0\right)^T.$$

Конечные значения вектора фазовых координат КА для пролёта Луны на заданном угловом расстоянии $\Delta\varphi_k = \varphi_K - \eta$ с нефиксированным вектором скорости $\overline{V}_T = \left(V_{rT}, \quad V_{\varphi T}\right)^T$ и с учётом условий трансверсальности для вектора скорости задаются следующим образом: $\overline{X}_T = \left(1, \quad \varphi_k, \quad P_{V_r} = 0, \quad P_{V_\varphi} = 0, \quad P_{\overline{m}} = -1\right)^T$.

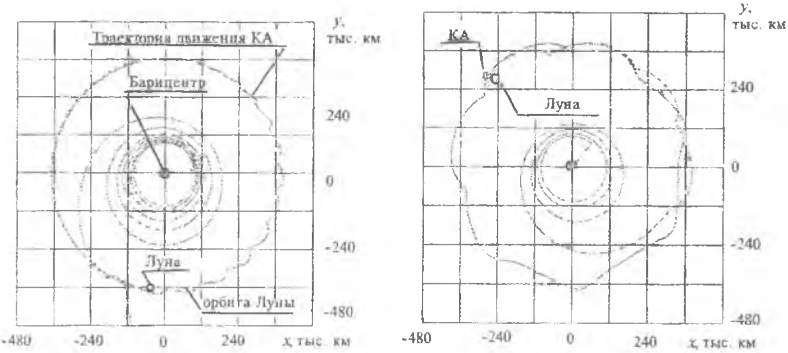
Моделирование оптимального движения КА сводится к решению задачи Коши для систем дифференциальных уравнений движения и сопряжённых множителей и оптимальном управлении, определяемом по зависимостям (10), (11). Для численного интегрирования использовался метод Рунге-Кутты четвёртого порядка с постоянным шагом.

Проектные параметры аппарата выбраны близкими к параметрам исследовательского КА «SMART-1» Европейского космического агентства: $m_0 = 400$ кг, $c = 15$ км/с.

Для решения красвой задачи применялся модифицированный метод Ньютона с автоматической оценкой сходимости и изменением шага вычисления производных и ограничений на приращения. Для получения решений с различными значениями проектных параметров КА и граничными условиями перелётов использован метод продолжения по параметру.

В результате моделирования установлено, что гравитация Луны оказывает существенное влияние на оптимальный закон управления и траекторию движения. Например, на рисунке 2 изображена оптимальная траектория для пролёта Луны на угловом расстоянии от неё 6°. Сплошной линией показано движение с включённым двигателем и оптимальным управлением. Пунктиром показаны траектории пассивного движения КА после завершения целевой задачи и отключения двигателей.

На рисунке 3 показано изменение радиус-вектор КА относительно барицентра, а на рисунке 4 – программа оптимального управления.



а) б)

Рис. 2. Оптимальные по минимальному расходу траектории пролёта Луны:

а) T = 45 сут, P=0,1 H; $\Delta\varphi_0 = 6°$, $\Delta\varphi_k = 7°$;

б) T = 35 сут, P=0,18 H; $\Delta\varphi_0 = 50°$, $\Delta\varphi_k = 3°$

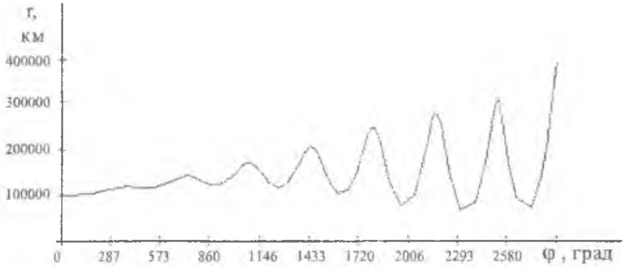


Рис. 3. Изменение радиус-вектора КА относительно барицентра

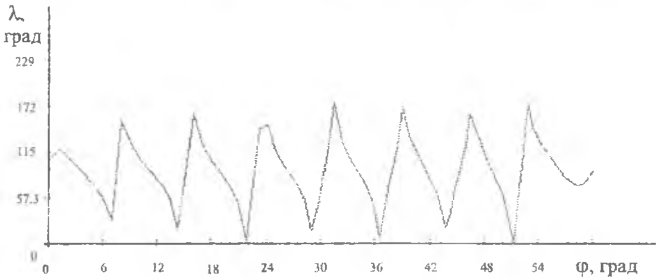


Рис. 4. Оптимальная программа управления

Таким образом, предложенная методика показала свою эффективность для оптимизации многовитковых траекторий движения КА с двигателями малой тяги в поле притяжения двух тел. Полученные оптимальные программы управления и соответствующие траектории движения могут быть использованы для решения задач формирования заданных селеноцентрических орбит.

Библиографический список

1. Старинова, О.Л. Оптимизация движения космического аппарата с двигателем малой тяги в системе Земля-Луна [Текст]/ О.Л. Старинова // Вестник СНЦ РАН № 1, 2005.