УДК 629.78

Заболотнов Ю.М., Байков С.С.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

В настоящее время существует большое количество задач, связанных с оптимальным управлением колебательными динамическими системами [1]. Наличие быстрых колебаний в таких системах и их большая размерность приводит к тому, что применение классических методов определения оптимального управления системами становится громоздким, трудоемким, а в некоторых случаях и невозможным. Одним из способов преодоления этих трудностей является применение метода усреднения, позволяющего, по крайней мере, в два раза понизить размерность задачи. В настоящее время теория и практика применения метода усреднения в сочетания с известными методами оптимального управления еще недостаточно разработана.

В данной работе предлагается методика построения оптимальных алгоритмов регулирования при управлении колебательными динамическими системами. Излагается формальная процедура построения алгоритмов и приводится пример решения задачи для стандартной квазилинейной колебательной системы. Рассмотренная методика построения алгоритмов регулирования может быть, например, применена при управлении движением космических аппаратов, в частности, при управлении колебаниями, возникающими при движении космических тросовых систем.

1. Рассмотрим построение управления для квазилинейной колебательной динамической системы, приведенной к стандартному виду:

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+c\,x=\varepsilon \underline{Q}(x,\frac{dx}{dt})+\varepsilon m u\,, \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор переменных состояния системы; a и c – известные квадратные матрицы; $\underline{Q}(x,\frac{dx}{dt})$ - известная n- мерная вектор-функция, определяющая действующие на систему возмущения; u – скалярная функция управления; m – вектор коэффициентов при управлении; ε – малый параметр задачи; t – время; n – количество степеней свободы.

В системе (1) матрицы a и c являются положительно определенными, что обеспечивает существование периодических (или почти периодических) решений для невозмущенной системы, в которую переходит система (1) при $\varepsilon=0$ [2]. Возмущающие функции $Q(x,\frac{dx}{dt})$ представляют собой квазилинейные функции переменных x и $\frac{dx}{dt}$.

Имея в виду применение в последующем метода усреднения и управление амплитудами колебаний системы (1), зададим критерий оптимальности в виде:

$$I=\varepsilon\int_0^T(K^*bK+Cu^2)dt\,, \tag{2}$$

где матрица b и параметр C определяют весовые коэффициенты критерия оптимальности, K – вектор амплитуд главных колебаний невозмущенной системы, T – время регулирования, K^* – транспонированный вектор K.

Ставится задача об оптимальном переводе системы, имеющей в начальный момент времени некоторые заданные амплитуды $K(0)$, в начало координат.

2. Поставленная задача оптимального управления решается с помощью применения двух классических методов: принципа динамического программирования Беллмана [3] и метода усреднения [4]. В соответствии с методом усреднения сделаем в системе (1) стандартную замену переменных $\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\Rightarrow(K,\varphi)$, то есть перейдем от исходных переменных к переменным "амплитуды – фазы". После проведения этой замены [5], получим

$$\frac{dA}{dt}=\varepsilon F(A,\varphi)+\varepsilon m_* u\sin(\varphi)\,,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\omega+\varepsilon\Phi(A,\varphi)+\varepsilon m_* u\cos(\varphi)\,, \tag{3}$$

где $F(K,\varphi)$ и $\Phi(K,\varphi)$ – известные функции, зависящие от исходных возмущений $Q(x,\frac{dx}{dt})$; m_* – преобразованный вектор коэффициентов при управлении; φ – вектор фаз колебаний: $\sin(\varphi)=\left(\sin(\varphi_1),...\sin(\varphi_n)\right)^*$ и $\cos(\varphi)=\left(\cos(\varphi_1),...\cos(\varphi_n)\right)^*$ – векторы, составленные из синусов и косинусов фаз колебаний; ω - вектор частот колебаний.

Частоты колебаний определяются из характеристического уравнения невозмущенной системы: $\det(c-a\omega^2)=0$ [2].

Уравнение в частных производных принципа Беллмана для системы (3) с критерием оптимальности (2) для определения производящей функции V будет иметь вид:

$$\min_{u}(\varepsilon K^{*}bK+\varepsilon Cu^{2}+\frac{\partial V}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt})=0\,. \tag{4}$$

Определяя минимум квадратичной функции в выражении (4), нетрудно получить функцию оптимального управления

$$u^{o}=-\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial K}D\sin\varphi+\varepsilon\right)..., \tag{5}$$

где вектор постоянных коэффициентов D определяется через компоненты матриц a, c и вектора m исходной системы (1) [5].

Решение уравнения (4) с учетом выражения (5) ищется в соответствии с принципом усреднения в виде ряда

$$V=V^{o}(K^{o})+\varepsilon V_{1}(K^{o},\varphi^{o})+\varepsilon^{2}..., \tag{6}$$

где K^{o},φ^{o} – соответственно усредненные амплитуды и фазы колебаний.

После подстановки ряда (6) в уравнение (4) и усреднения по фазам, получим дифференциальное уравнение в частных производных первого приближения для определения функции $V^{o}(K^{o})$:

$$K^{*}bK+\frac{\partial V}{\partial K}\langle B(K,\varphi)\sin\varphi\rangle-\frac{1}{8C}\left(\frac{\partial V}{\partial K}D\right)^{2}=0\,, \tag{7}$$

где вектор – функция $B(K,\varphi)$ определяется действующими в системе возмущениями $Q(x,\frac{dx}{dt})$, $\langle\cdot\rangle$ – оператор усреднения по фазам φ.

В уравнении (7) верхний индекс (0) у переменных K,φ,V опущен. Решение уравнения (7) ищется в виде положительно определенной квадратичной формы $V=K^{*}AK$ методом неопределенных коэффициентов, где A – симметричная матрица коэффициентов. Положительная определенность функции V и отрицательная определенность ее полной производной гарантирует в соответствии со вторым методом Ляпунова асимптотическую устойчивость усредненной системы для амплитуд колебаний, которая получается усреднением системы (3). При построении приближенно оптимального управления в уравнении (7) учитывается лишь линейная часть возмущающих функций $Q(x,\frac{dx}{dt})$.

3. Изложенный метод построения приближенно-оптимального управления был апробирован на колебательных динамических системах с одной и двумя степенями свободы стандартного вида (1). Задача для системы с одной степенью свободы реша-

лась двумя способами: классическим методом расчета оптимальных регуляторов [3] и предлагаемым методом. Были приняты следующие исходные данные: $\varepsilon = 0.3$, $\omega = m = b = 1$, $Q(x, \frac{dx}{dt}) = \mu \frac{dx}{dt}$, $\mu = 1$. Исходная система была неустойчива, так как $\mu > 0$. Были получены следующие результаты оптимизации: в обеих системах после оптимизации получилась особая точка "устойчивый фокус", значения критериев оптимальности оказались близкими. Для системы без усреднения $I = 2.802$, для системы с усреднением $I_n = 3.046$. Фазовые траектории систем с управлением практически совпали.

Для системы с двумя степенями свободы была проведена классификация возможных изменений фазовых портретов системы при введении приближенно оптимального управления (5) с учетом нелинейных возмущений, когда функция $Q(x, \frac{dx}{dt})$ представляла собой кубический полином по переменным $x, \frac{dx}{dt}$. Фазовые портреты системы анализировались на плоскости амплитуд колебаний K_1, K_2. Выявлено, по крайней мере, пять возможных форм изменений фазовых портретов при введении управления в систему с двумя степенями свободы.

Библиографический список

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
2. Заболотнов Ю.М. Теория колебаний. Самара: СГАУ, 1999.
3. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.
4. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1980.
5. Заболотнов Ю.М. Оптимальное управление непрерывными динамическими системами. Самара: СГАУ, 2006.