Н.В.Воропаева, В.А.Соболев

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ЭВМ В ЗАДАЧАХ ПОНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ МОДЕЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Многие задачи динамики и управления движением летательных аппаратов, представляющих собой сложные механические системы, включающие в себя упругие и диссипативные элементы, гироскопические устройства, характеризуются наличием разнотемповых составляющих. Математическими моделями таких задач являются системы нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, содержащих один или несколько малых параметров при части производных. Применение численных методов для анализа таких систем затруднено ввиду высокой размерности и вычислительной жесткости.

В настоящей работе предлагается метод асимптотической декомпозиции, базирующийся на теории интегральных многообразий, позволяющий сводить анализ исходной системы к анализу более простых систем меньшей размерности.

Рассматривается система вида

$$\dot{x} = f(t,x,y,\varepsilon),$$
$$\varepsilon \dot{y} = g(t,x,y,\varepsilon), \qquad (1)$$

$x \in R^m$, $y \in R^n$, $t \in R$, ε – малый положительный параметр. При естественных предположениях о гладкости правых частей и устойчивости соответствующих линеаризованных систем устанавливается существование замены переменных вида

$$x=v+\varepsilon H(t,v,z,\varepsilon),$$
$$y=z+h(t,x,\varepsilon), \qquad (2)$$

приводящей систему (I) к "блочно-треугольному" виду

$$\dot{v} = F(t,v,\varepsilon),$$
$$\varepsilon \dot{z} = G(t,v,z,\varepsilon), \qquad (3)$$

где первое уравнение не зависит от z, а функция $G(t,v,z,\varepsilon)$ обращается в нуль при $z=0$.

Расщепляющее преобразование строится следующим образом. Установлено, что система (I) имеет интегральное многообразие медленных движений вида

$$y=h(t,x,\varepsilon), \tag{4}$$

где функция h может быть найдена с любой степенью точности в виде асимптотического разложения

$$h(t,x,\varepsilon)=h_0(t,x) + \varepsilon h_1(t,x) + \varepsilon^2 h_2(t,x) + \dots$$

из уравнения

$$\varepsilon h_t + \varepsilon h_x f(t,x,h,\varepsilon) = g(t,x,h,\varepsilon).$$

При этом $h_0(t,x)$ является решением уравнения $g(t,x,h,0)=0$, а функции $h_i(t,x)$ $i>0$ определяются из линейных алгебраических уравнений

$$B h_i = g_i - \frac{\partial h_{i-1}}{\partial t} - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial h_k}{\partial t} f_{i-k-1} \tag{5}$$

где $B=B(t,x)=\frac{\partial g}{\partial y}(t,x,h_0(t,x),0)$, f_k, g_k – коэффициенты асимптотических разложений функций $f(t,x,h,\varepsilon)$, $g(t,x,h,\varepsilon)-B h_i$. Отметим, что правые части уравнений (5) не зависят от h_i.

Уравнение, описывающее движение на интегральном многообразии имеет вид

$$\dot v = F(t,v,\varepsilon), \tag{6}$$

где $F(t,v,\varepsilon)=f(t,v,h(t,v,\varepsilon),\varepsilon)$.

Далее, в окрестности интегрального многообразия (4) вводятся переменные v – решение уравнения (6), $w=x-v$, $z=y-h(t,x,\varepsilon)$ и рассматривается расширенная вспомогательная система

$$\dot v = F(t,v,\varepsilon)$$

$$\dot w = W(t,v,w,z,\varepsilon)$$

$$\varepsilon \dot z = Z(t,v,w,z,\varepsilon), \tag{7}$$

которой эти переменные удовлетворяют.

Показывается, что у системы (7) существует интегральное многообразие быстрых движений вида $w=\varepsilon H(t,v,z,\varepsilon)$, $H(t,v,0,\varepsilon)=0$, которое может быть найдено с любой степенью точности в виде асимптотического разложения

$$H(t,v,z,\varepsilon)=H_0(t,v,z) + \varepsilon H_1(t,v,z) + \varepsilon^2 H_2(t,v,z) + \dots$$

из уравнения

$$\varepsilon H_t + \varepsilon H_v F(t,v,\varepsilon) + H_z Z(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon) = W(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon)$$

Функции $H_i(t,v,z,\varepsilon)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial H_{i-1}}{\partial t} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial H_j}{\partial v} F_{i-j-1}(t,v) + \frac{\partial H_i}{\partial z} B(t,v,0)\, z +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial H_j}{\partial z} Z_{i-j}(t,v,H_0,\ldots,H_{i-j-1},z) =$$

$$= W_i(t,v,H_0,\ldots,H_{i-1},z) \qquad (8)$$

где F_i, W_i, Z_i – коэффициенты асимптотических разложений функций

$F(t,v,\varepsilon)$, $W(t,\chi+\varepsilon \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i H_i(t,v,z),z,\varepsilon)$,

$Z(t,\chi+\varepsilon \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i H_i(t,v,z),z,\varepsilon)$

по степеням малого параметра ε. Система (8) представляет собой систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка для координат вектора $H_i(t,v,z)$, в которых уравнения для различных координат независимы.

Рассмотрим более подробно некоторые классы систем, для которых расщепляющее преобразование (2) конструктивно строится.

В случае когда рассматриваемая система является линейной по переменным x и y, расщепляющее преобразование (2) также будет линейным, а результирующая система – "блочно-диагональной".

Пусть теперь правые части системы (I) имеют вид

$$f(t,x,y,\varepsilon) = f_0(t,x,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^{i-1} f_i(t,x,y,\varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1})$$

$$g(t,x,y,\varepsilon) = g_0(t,x,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^{i-1} g_i(t,x,y,\varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1})$$

где

$g_1(t,x,y,\varepsilon) = B(t,x,\varepsilon)y$

$$f_i(t,x,y,\varepsilon) = \sum_{j_1+\ldots j_n=i} f^{(i)}_{j_1,\ldots,j_n} y_1^{j_1}\ldots y_n^{j_n},$$

$$g_i(t,x,y,\varepsilon) = \sum_{j_1+\ldots j_n=i} g^{(i)}_{j,\ldots,j} y_1^{j_1}\ldots y_n^{j_n},$$

$$f^{(i)}_{j_1,\dots,j_n}= f^{(i)}_{j_1,\dots,j_n}(t,x,\varepsilon),\quad g^{(i)}_{j_1,\dots,j_n}= g^{(i)}_{j_1,\dots,j_n}(t,x,\varepsilon)$$

$y_1,\dots y_n$ - координаты вектора у.

Показано, что этом случае решения уравнений (8) могут быть найдены в виде конечных сумм

$$H_i(t,v,z)=\sum_{j=1}^{i+1} H_{ij}(t,v,z),$$

где H_{ij} представляют собой формы j-го порядка относительно координат вектора z, т.е.

$$H_{ij}(t,v,z)=\sum_{j_1+\dots j_n=j} H^{(i)}_{j_1,\dots,j_n} z_1^{j_1}\dots z_n^{j_n},$$

причем коэффициенты $H^{(i)}_{j_1,\dots,j_n}$ определяются из линейной алгебраической системы.

Расщепляющее преобразование (2) позволяет производить также декомпозиицию начальных и во многих случаях краевых условий. Показано, что для качественного анализа задачи во многих случаях достаточно исследовать подсистему, описывающую только медленные движения. Эта подсистема имеет меньшую размерность, не является сингулярно возмущенной и представляет собой упрощенную модель исходной задачи.

Алгоритмы асимптотической декомпозиции реализованы в виде комплекса программ на языке аналитических вычислений REDUCE.