

Фролов В. А.

## УЧЕТ СЖИМАЕМОСТИ В ДВУМЕРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ОБТЕКАНИЯ НЕТОНКИХ ТЕЛ

**1 Введение.** Методы учета сжимаемости в двумерных потоках достаточно хорошо разработаны [1, 2, 3, 4, 5]. Широкое распространение получил метод на основе модели газа С. А. Чаплыгина [6]. Недостатком этого метода является необходимость поиска потенциала скорости и функции тока, которые должны удовлетворять линейным уравнениям газовой динамики в плоскости годографа скорости. Эти уравнения получили название уравнений Чаплыгина. Обычно для решения уравнений Чаплыгина применяется теория функции комплексного переменного (ТФКП). Решение этих уравнений в случае адиабатического течения связано с большими трудностями, поскольку не всегда удается сформулировать граничные условия в плоскости годографа скорости. Однако для баротропного газа можно рассмотреть приближенную модель, которая получила название – модель газа Чаплыгина. Решение задачи для модели газа Чаплыгина выполняется методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимают функции, удовлетворяющие несжимаемой жидкости. Обзор методов, учитывающих сжимаемость потока в двумерных течениях, содержится в работах [2-5], но в основном все эти методы были направлены на решение задач обтекания удобообтекаемых тонких тел типа аэродинамических профилей. Предположения о тонкости тела, которые делались в большинстве методов, учитывающих сжимаемость потока, не могут быть использованы для неудобообтекаемых тел. В 1949 г. проф. Г. Ф. Бураго опубликовал работу [7], в которой изложил приближенный метод учета сжимаемости двумерных течений. Он применил разработанный метод для тонких тел – аэродинамических профилей, однако, в методе не использовались предположения о тонкости тел. Автором данной работы были выполнены на компьютере расчеты по методу Бураго для различных задач обтекания двумерных контуров [8] и было показано, что приближенный метод оказался достаточно точным. По крайней мере, этот метод по точности не уступает расчетам, выполненным для аэродинамического про-

филя Л. И. Седовым [4] и для эллиптического профиля Г. А. Домбровским [5], а в некоторых случаях даже имеет лучшее согласование с экспериментальными данными.

Целью работы является анализ применимости приближенного метода Бураго для нетонких двумерных тел. В качестве двумерных тел рассматриваются эллиптические контуры и «толстые» двуугольники.

Достаточно подробное описание метода представлено в работе [8], из которого следует, что для расчета параметров сжимаемого потока необходимо знать параметры несжимаемого течения. Согласно приближенному методу на основании параметров несжимаемого потока также можно определить критическое число Маха, при котором где-либо на контуре возникнет звуковая скорость течения. Таким образом, предлагаемый подход является универсальным, поскольку не связан с самим расчетом параметров течения. Метод Бураго является методом пересчета параметров несжимаемого течения в параметры сжимаемого течения. В принципе, данным методом можно воспользоваться при оценке параметров сжимаемого течения даже по экспериментальным результатам, полученным при малых дозвуковых скоростях обтекания ( $M_\infty \approx 0$ ). Чем толще тело и чем больше число Маха набегающего потока, тем сильнее будет проявляться сжимаемость среды. Поэтому наиболее «тяжелым» случаем для оценки точности метода является критический режим при обтекании толстого тела ( $\delta \geq 1,0$ ), когда число Маха набегающего потока равно критическому числу Маха ( $M_\infty = M_*$ ). Следует ожидать наибольшую погрешность метода при обтекании тела с критическим числом Маха на бесконечности.

**2 Результаты расчетов.** В таблице 1 приведены значения критического числа Маха, рассчитанные для цилиндра различными авторами, а также значения относительного рассогласования в сравнении с расчетными данными, полученными автором. Если исключить из сравнения раннюю работу С. Kaplan'a [9], в которой показатель адиабаты для воздуха принимался равным значению  $\kappa = 1,408$ , что отразилось на величине вычисленного критического числа Маха, и работу С. Jacob'a [5], то на основании данных таблицы 1 можно утверждать, что точность вычисления критического числа Маха для течения около кругового цилиндра по методу Бураго по сравнению с другими методами в среднем приблизительно соответствует относительному рассогласованию 6,2%. Из таблицы 1 видно, что значение критического числа Маха для цилиндра, вычисленное по методу Бураго, является наименьшим из представленных. Однако это не означает, что оно является наиболее неточным по сравнению с остальными. В работе М. Holt'a и В. Messon'a [10] указывается на то, что «симметричные тече-

ния (в которых не возникает скачок) были рассчитаны только до значения числа Маха невозмущенного потока  $M_\infty = 0,37$ ». Это обстоятельство косвенно подтверждает, что точное значение критического числа Маха находится ближе к определенному по методу Бурого, чем по другим методам. В работах [11, 12] на основании метода интегральных соотношений А. А. Дородницына было получено значение критического числа Маха  $M_* = 0,399$  (таблица 1) Значение это рассчитано для третьего приближения, в то время как второе приближение дает значение  $M_* = 0,401$  Можно предположить, что последующие приближения дадут значения критического числа Маха меньше 0,399. О неточности расчета значений  $M_*$  свидетельствует высказывание в [10]: «точное значение критического числа Маха по настоящему методу еще должно быть определено. Для этой цели требуется проведение специального расчета, потому что вычислительные процедуры для докритического и закритического случаев нуждаются в улучшении при приближении к критическому режиму, ибо ни та, ни другая процедуры не могут быть применены точно при этом режиме».

Таблица 1– Сравнение расчетных значений критического числа Маха при обтекании цилиндра

Значения критического числа Маха	Метод, авторы результатов расчета	Источник	Относит. отличие, %
0,37170±0,00001	метод Бурого, расчеты	–	–
0,415	расчеты С. Jacob'a	[5]	10,4
0,409	метод Poggi, расчеты С. Kaplan'a	[9]	9,1
0,404	расчеты I. Imai'a	[5]	8,0
0,400	метод Rayleigh'a-Janzen'a, расчеты Т. Simisaki'a	[13]	7,1
0,399	метод интегральных соотношений А. А. Дородницына, расчеты П. И. Чушкина	[11, 12]	6,8
0,39853±0,00002	многополосный метод интегральных соотношений А. А. Дородницына, расчеты R. Melnik'a и D. C. Ives'a	[13]	6,7
0,3983±0,0002	метод Rayleigh'a-Janzen'a, расчеты Хоффмана	[13]	6,6
0,396	метод аппроксимации адиабаты, аппроксимация $A_1$ , Г. А. Домбровский	[5]	6,1
0,390	метод интегральных соотношений А. А. Дородницына, расчеты M. Holt'a и B. Messon'a	[13]	4,7
0,390	расчеты I. Imai'a, Z. Hasimoto	[5]	4,7
0,390	метод аппроксимации адиабаты, аппроксимация $A_3$ , Г. А. Домбровский	[5]	4,7

В таблице 2 и на рисунке 1 приведены результаты расчетов критических чисел Маха для эллипсов по предлагаемому методу и методу интегральных соотношений А. А. Дородницына, выполненных в [11]. Учет сжимаемости производился на основе использования решения потенциальной задачи, в которой использовалась ТФКП и конформное преобразование Н. Е. Жуковского внешности эллипса на внешность круга [1]. Следует заметить, что расчеты

в диапазоне значений  $0,4 \leq \delta \leq 0,8$  ( $\delta$  – коэффициент сжатия эллипса) в [11] выполнены только для второго приближения, а каждое последующее приближение приводило к уменьшению значения критического числа Маха. Этим фактом может объясняться некоторая дополнительная погрешность. В целом можно отметить, что относительное рассогласование увеличивается при возрастании величины  $\delta$  для эллипсов, однако максимальная относительная погрешность не превышает 7% для круга.

Таблица 2 – Сравнение расчетных значений для критического числа Маха при обтекании эллипсов

$\delta$	$C_{pm}^0$	Чушкин [11]	Расчет по методу Бурого	Относительное отличие, %
0,05	-0,1025	0,869	0,884	1,77
0,1	-0,2100	0,803	0,807	0,50
0,15	-0,3225	0,752	0,748	0,53
0,20	-0,4400	0,709	0,700	1,27
0,40	-0,9600	0,588	0,566	3,74
0,60	-1,5600	0,506	0,480	5,14
0,80	-2,2400	0,447	0,418	6,49
1,00	-3,0000	0,399	0,372	6,77

На рисунке 2 приведены результаты расчета зависимости критического числа Маха от угла при вершине двуугольника (тело образованное двумя сегментами окружности). Решение потенциальной задачи обтекания двуугольника было получено на основании ТФКП и конформного отображения внешности двуугольника на внешность круга [14]. На рисунке 2 значками показаны результаты для одиночного цилиндра  $\left(\delta = \frac{\pi}{2}\right)$  (таблица 2) и двух касающихся друг друга цилиндров ( $\delta = \pi$ ). Последний результат получен в работе автора [8] и его можно рассматривать как предельный случай «толстого» двуугольника.

На рисунке 3 показаны результаты расчетов для относительной скорости на цилиндре по данному приближенному методу, методу интегральных соотношений [10], методу на основе применения преобразования Лежандра [15] и методу Rayleigh'a-Janzen'a [2], [3]. Данные расчета Т. Simisaki заимствованы из работы [10]. Расчеты проводились для числа Маха набегающего потока  $M_\infty = 0,37$ , которое почти равно критическому числу Маха (таблица 1). Из рисунка 3 видно хорошее согласование расчетных данных по методу интегральных соотношений и методу применения преобразований Лежандра. Вычисленное максимальное значение скорости на цилиндре в сжимаемом потоке по методу Бурого больше соответствующих

значений, рассчитанных другими методами, и приблизительно в 1,25 больше, чем для несжимаемой жидкости. Последнее обстоятельство говорит о важности учета сжимаемости при обтекании цилиндра. На рисунке 4 показано изменение максимальной скорости на цилиндре в зависимости от числа Маха набегающего потока. Здесь же приведены расчеты Т. Simisaki'a [10] по методу Rayleigh'a-Janzen'a, расчеты М. Holt'a и В. Messon'a [10] по методу интегральных соотношений А. А. Дородницына и расчеты Г. А. Домбровского [5] по методу аппроксимации адиабаты. Достаточно большое отличие в расчетных данных, полученных по одному и тому же методу Rayleigh'a-Janzen'a, объясняется тем, что Т. Simisaki удалось получить решение с учетом пятого члена разложения, в то время как решение Shih-I Pai'a [3] соответствует только первому члену разложения.

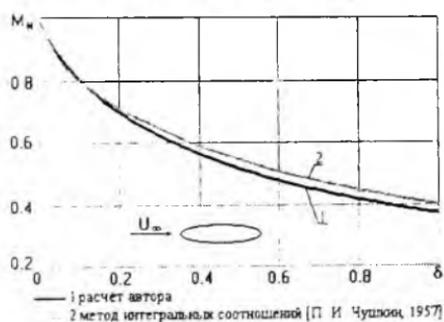
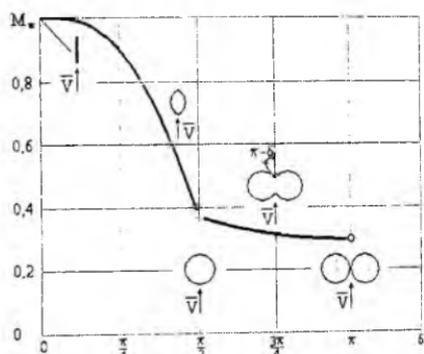


Рис 1 – Зависимость критического числа Маха от степени сжатия эллипса



- $M_{*c} = 0.372$ , величина критического числа Маха для цилиндра
- $M_{*c} = 0.296$ , величина критического числа Маха для двух цилиндров, касающихся друг друга

Рис 2 – Зависимость критического числа Маха от угла при вершине двуугольника

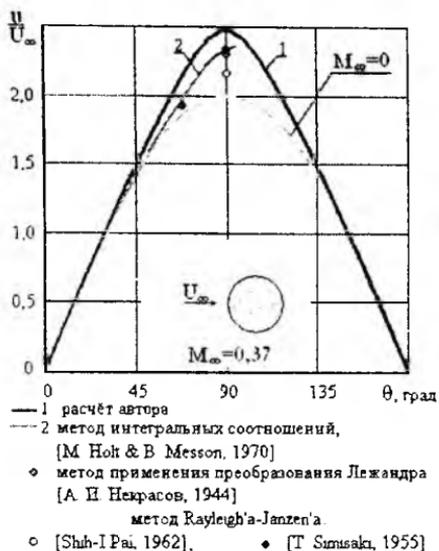


Рис.3 – Изменение относительной скорости на цилиндре



Рис.4 – Зависимость максимальной относительной скорости на цилиндре от числа Маха

Из рисунка 4 следует, что расхождение расчетных данных увеличивается с возрастанием числа Маха набегающего потока. Как и следовало ожидать, наибольшее рассогласование данных отмечается при режиме обтекания, соответствующему критическому числу Маха.

**3 Заключение.** Представленные результаты показывают применимость метода Бурого для расчетов параметров сжимаемого течения около нетонких тел. Чем толще тело, тем меньшее значение критического числа Маха реализуется при его обтекании с дозвуковыми скоростями. Для нетонких тел учитывать сжимаемость потока необходимо даже при числах Маха  $M_\infty \leq 0,4$ , которые обеспечивают режим несжимаемого течения для тонких тел.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978.
2. Липман Г. В., Пакет А. Е. Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости. Пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
3. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. Пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1980.
5. Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа. – М.: Наука, 1964.
6. Чаплыгин С. А. О газовых струях. – М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. [см. также: Чаплыгин С. А. Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. – М.: Наука, 1976].
7. Бураго Г. Ф. Теория крыловых профилей с учетом влияния сжимаемости воздуха. – М.: Издательство ВВИА имени проф. Н. Е. Жуковского, 1949.
8. Frolov V. A. High-speed flows of the compressible fluid around two circle contours with a pair of symmetric vortices. The International Summer Scientific Scholl "High Speed Hydrodynamics", June 16-23, 2002, Cheboksary, Russia, 2002. – P.331-338.
9. Kaplan C. Two-dimensional subsonic compressible flow past elliptic cylinders. – NACA Report 624, 1938. – P.245-252.
10. Холт М., Мессон Б. Расчет обтекания тел с большой дозвуковой скоростью при помощи метода интегральных соотношений/Численные методы в механике жидкостей. – М.: Мир, 1973.
11. Чушкин П. И. Обтекание эллипсов и эллипсоидов дозвуковым потоком газа//Вычислительная математика, сб. 2. – М.: Академия наук СССР, 1957, с.20-44.
12. Чушкин П. И. Расчет обтекания произвольного профиля и тела вращения в дозвуковом потоке газа (симметричный случай)//Вычислительная математика, сборник 3. – М.: Академия наук СССР, 1958, с.99-110.
13. Мелник Р., Айвс Д. Расчет докритических течений около плоских крыловых профилей при помощи многополосного метода интегральных соотношений/Численные методы в механике жидкостей – М.: Мир, 1973, с.26-38.
14. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. Часть первая. – Л., М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
15. Некрасов А. И. О плоскопараллельном движении газа при дозвуковых скоростях//Прикладная математика и механика, том VIII, вып. 4, 1944, с.249-266.