9. Горелов Ю.Н. Концепция локальных математических моделей крупногабаритных космических конструкций //Труды XXVI Чтений К.Э.Циолковского. Секция "Проблемы ракетной и космической техники". М., 1992. С.118-121.

Е.Я.Горелова

УПРАВЛЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ ДЛЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Широкое распространение, которое получили в технике гироскопические системы, привлекает к ним внимание математиков. Существует большое количество работ, в которых изучаются методы приближенного решения уравнений движения таких систем, исследуется устойчивость стационарных режимов, а также обсуждается возможность замены этих уравнений так называемыми прецессионными уравнениями.

Работа /1/ посвящена анализу уравнений гироскопических систем, находящихся под действием случайных сил. Исследуется возможность замены уравнений движения соответствующими прецессионными уравнениями. Этот подход широко распространен в механике и дает приемлемые результаты во многих случаях. Однако, существует большое количество примеров, когда замена полных уравнений прецессионными приводит к неточным или к качественно неверным результатам. В /1/ показано, что использование прецессионных уравнений как основы для уравнений ошибки фильтрации может привести к недопустимой погрешности.

Ниже изучается возможность перехода к прецессионным уравнениям для гироскопической системы в задаче оптимального управления с квадратичным функционалом качества.

Пусть дана система вида /2/

$$\varepsilon\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + B_0(t,\varepsilon)u\,, \quad x(0)=x. \tag{1}$$

Здесь x – n-мерный вектор состояния, u – r-мерный вектор управляющих параметров, ε – малый положительный параметр, $t \in [0,T]$. Управление требуется выбрать так, чтобы минимизировать функционал

$$I = 0{,}5x'(T)F_0x(T) + 0{,}5\int_0^T [x'Q_0(t,\varepsilon)x + u'R(t,\varepsilon)u]dt, \qquad (2)$$

где F и Q– симметрические неотрицательно определенные операторы, R – симметрическая положительно определенная матрица. Все матрицы, входящие в (I) и (2), достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по t и ε при $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. В этом случае закон регулирования имеет вид /2/

$$u = -R^{-I}B_0'Kx,$$

где $K=K'$ является решением матричного уравнения Риккати

$$\varepsilon\dot{K} + A'K + KA - KSK = -Q,$$

$$K(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}F_0,\quad S = B_0R^{-1}B_0'.$$

Пусть теперь задача (I),(2) поставлена таким образом, что включает в себя системы с быстрыми и медленными переменными. При этом матрицы A, B_0, F_0 и Q_0 имеют блочную структуру

$$A=\begin{bmatrix} \varepsilon A_1 & \varepsilon A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},\quad B_0=\begin{bmatrix} \varepsilon B \\ B \end{bmatrix},\quad F_0=\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2' & F_3 \end{bmatrix},\quad Q_0=\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix},$$

где A_I, F_I, Q_I – $k\times k$ – матрицы, B_I – $k\times r$ – матрица, а остальные блоки имеют соответствующие размеры. При этом первые k компонент вектора x – медленные переменные, остальные $n-k$ компонент – быстрые. Закон оптимального управления также можно записать в блочном виде /2/

$$u=-R^{-I}(B_I'K_I+B_2'K_2' \qquad \varepsilon B_I'K_2+B_2'K_3)x,$$

а матричное уравнение Риккати – в виде системы

$$\dot{K}_I=-K_IA_I-A_I'K_I-K_2A_3-A_3'K_2'+K_IS_IK_I+$$

$$+K_IS_2K_2'+K_2S_2'K_I+K_2S_3K_2' -Q$$

$$\varepsilon\dot{K}_2=-K_IA_2-K_2A_4-A_3'K_3+K_IS_2K_3+K_2S_3K_3+$$

$$+\varepsilon(K_2S_2K_2+K_IS_IK_2-A_I'K_2)-Q_2 \qquad (3)$$

$$\varepsilon\dot{K}_3=-K_3A_4-A_4'K_3+K_3S_3K_3+\varepsilon(K_3S_2'K_2+$$

$$+K_2'S_2K_3+\varepsilon K_2'S_IK_2-K_2'A_2-A_2'K_2)-Q_3.$$

Прежде чем обсудить процедуру решения системы (3), запишем ее вид для уравнений движения регулируемой гироскопической системы /3/

$$\ddot{x}+[HG_0(t)+G_I(t)]\dot{x}+N(t)x = B(t)u \tag{4}$$

Здесь x-n-мерный вектор состояния системы; $G_0(t)$- кососимметрическая матрица гироскопических сил $t\geq 0$; $G_I(t)$- симметрическая матрица сил трения; $N(t)$- матрица потенциальных и неконсервативных сил; H - большой параметр, пропорциональный угловой скорости собственного вращения гироскопа и значительно превосходящий значения всех остальных параметров для большинства гироскопических систем.

Полагая $\varepsilon = 1/H$ в (2.1), перепишем (4) в виде системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}=y \\ &\varepsilon\dot{y}=-[G_0(t)+\varepsilon G_I(t)]y-\varepsilon N(t)x+\varepsilon B(t)u \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть требуется выбрать управление u так, чтобы минимизировать функционал

$$I = 0{,}5x'(T)Fx(T) + 0{,}5\int_0^T[x'Q(t,\varepsilon)x + u'R(t,\varepsilon)u]dt. \tag{6}$$

Заметим, что введенные ранее матрицы для задачи (5),(6) имеют вид

$$A_I=0,\ A_2=E,\ A_3=-\varepsilon N(t),\ A_4=-(G_0(t)+\varepsilon G_I(t)),\ B_I=0,\ B_2=\varepsilon B,$$

$$F_I=F, F_2=F_3=0, Q_I=Q,\ Q_2=Q_3=0.$$

Тогда закон оптимального управления для гироскопической системы (5) имеет вид

$$u=-\varepsilon R^{-I}B Э(K_2'x+K_3y), \tag{7}$$

где K_I, K_2, K_3 определяются из системы уравнений, полученной из (3)

$$\begin{aligned} &\dot{K}_I=\varepsilon K_2N+\varepsilon N'K_2'+\varepsilon^2K_2BR^{-I}B'K_2-Q \\ &\varepsilon\dot{K}_2=-K_I+K_2(G_0+\varepsilon G_I)+\varepsilon N'K_3+\varepsilon^2K_2BR^{-I}B'K_3 \\ &\varepsilon\dot{K}=K_3(G_0+\varepsilon G_I)+(G_0+\varepsilon G_I)'K_3+\varepsilon^2K_3BR^{-I}B'K_3-\varepsilon K_2'-\varepsilon K_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Решение системы сингулярно возмущенных матричных уравнений Риккати является достаточно сложной задачей, которая обсуждалась, например, в /2/ и /4/. В связи с этим, так же как и в задаче оптимальной фильтрации, возникает вопрос о возможности использования прецессионных уравнений для получения некоторого приближения оптимального управления. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Прецессионные уравнения для (5) имеют вид

$$\dot{x}=-(G_0+\varepsilon G_I)^{-I}(\varepsilon NX+\varepsilon Bu). \tag{9}$$

Функционал (6)в данном случае остается без изменений. Тогда оптимальное управление для задачи (9),(6) определяется равенством /4/

$$u=\varepsilon R^{-I}((G_0+\varepsilon G_I)^{-I}B)'P(t)x, \tag{10}$$

где P(t)- решение матричного уравнения Риккати

$$\dot{P}+Q-\varepsilon((G_0+\varepsilon G_I)^{-I}N)'P-\varepsilon P(G_0+\varepsilon G_I)^{-I}N -$$

$$- \varepsilon P(G_0+\varepsilon G_I)^{-I}BR^{-I}B'((G_0+\varepsilon G_I)^{-I})'P=0 \tag{11}$$

Выполним далее сравнение квазиоптимальных стратегий (7) и (10). С учетом уравнения (II) нулевое приближение для матрицы P(t) определяется из условий

$$\dot{P}+Q=0, \qquad P(T)=F. \tag{12}$$

Следовательно, квазиоптимальное управление, определенное равенством (10), имеет вид

$$u=-\varepsilon R^{-I}B'G_0^{-I}P(t)+ O(\varepsilon^2), \tag{13}$$

где P(t) удовлетворяет (I2), O – символ Ландау. Заметим, далее, что в (7) нулевое приближение для матрицы K_2 с учетом (8) определяется из условий

$$\dot{K}_I=-Q, \quad -K_I+K_2G_0=0, \quad K_I(T)=F,$$

которые эквивалентны (I2). Следовательно, если бы разложение для матрицы K_3 начиналось со степеней ε не ниже первой, то управление (I3), полученное на основе прецессионных уравнений, могло бы служить аппроксимацией квазиоптимального управления (7). Рассмотрим этот вопрос подробнее. Из (8) нулевое приближение для K_3 определяется равенством

$$K_3G_0-G_0K_3=0 \tag{14}$$

Так же как в задаче оптимального оценивания суть дела состоит в том, что уравнение (I4) имеет ненулевые решения. Это связано с тем, что ядро линейного оператора в левой части (I4) состоит не только из нулевых элементов. Таким образом, использование прецессионных уравнений в задаче оптимального управления может привести к недопустимой погрешности.

Список литературы

1. Соболев В.А.Горелова Е.Я. Оптимальное оценивание в гироскопических системах //ТВиП. - 1992. - Т.37, N4. - С.804-806.

2. Соболев В.А. Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления //АиТ. - 1991. - N5. - С.53-64.

3. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. - М.:Наука,1974. - 344 с.

4. Kokotovic P.V. Applications of singular perturbation techniques to control problems //SIAM Review. - 1984. - V.26, N4. - P.501-550.

УДК 629.78.021.7

О.И.Горелова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ УПРУГОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Синтез динамических схем упругих КА отвечает переходу от исходных физических моделей к соответствующим математическим моделям движения /1,2/. Неотъемлемым этапом такого перехода является анализ динамических свойств упругого КА. Существующие требования к нему указывают на необходимость разработки эффективных процедур решения задачи математического моделирования динамических свойствупругих КА. Поэтому цель настоящей статьи - дать общую постановку этой задачи и указать основные варианты ее решения.

I. После приведения к нормальной форме основной математической модели движения упругого КА /3/ получим:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{v} , \qquad (1)$$

где $\bar{x}$ - вектор состояния, $\bar{v}$ - вектор входных воздействий, A - матрица динамики, а B - матрица коэффициентов возбудимости упругого КА.