УДК 512.516.5

Лежнев М.В.

ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ И ФУНКЦИИ ТОКА ПРИСОЕДИНЕННОГО ВИХРЯ

Для задачи потенциального обтекания контура дано представление функции тока присоединенного вихря, построен алгоритм численного решения задачи. Приведены картины течений для присоединенного вихря в единичном круге.

1. Рассмотрим задачу плоского обтекания ограниченной области Q с достаточно гладкой границей S $\left(S \in C^{1+\alpha},\ \alpha > 0\right)$ потенциальным потоком несжимаемой жидкости. В неограниченной области $Q^{+} = R^2 \setminus Q$ требуется построить векторное поле скоростей $\overline{w}(x) = \{ u(x), v(x)\}$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее условиям: а) $div\, \overline{w}(x) = 0$, $rot\, \overline{w}(x) = 0$ при $x \in Q^{+}$, б) задана скорость на бесконечности $\overline{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$, в) граница S есть линия тока. Для такого векторного поля существует функция тока $\psi(x)$: $\overline{w}(x) = \left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_2}, -\dfrac{\partial}{\partial x_1} \right\} \psi$.

Обтекаемую область по предположению Жуковского [1] можно заменить присоединенным вихрем, который порождает данное обтекающее течение, т.е. внешнее течение и присоединенный вихрь непрерывно продолжают друг друга через гладкие части границы.

Функция тока такого течения может быть представлена в виде [2]

$$\psi(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \int_Q g(y) E(x-y)\, dy, \tag{1}$$

где – гармоническая плотность присоединенных вихрей $g(y)$ может быть как угодно приближена суммами вида $\sum c_m \gamma_m(y)$, $\gamma_m(y) = \ln\left|z^m - y\right|$, $\left\{z^m\right\}_{m=1}^{\infty} \in Q^{+}$ – последовательность базисных точек, удовлетворяющих условию единственности гармонических функций [2], $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа.

2. **Алгоритм приближенного представления функции тока**. Условие непротекания в) может быть переписано в виде $\psi(x) = const = b$ при $x \in S$. Вариационная задача $\left\|\psi(x) - b\right\|^2_{L_2(S)} \to \min\limits_{c}$ для нахождения коэффициентов c_m разложения $g(y) \approx \sum\limits_{m=1}^{M} c_m \gamma_m(y)$, $y \in Q$, приводит к СЛАУ $Ac = d$ с матрицей Грама $A(M \times M)$, где ее элемент

$a_{pn} = \int\limits_S \mu_p(x)\mu_n(x)\,ds$, $\mu_p(x) = \int\limits_Q \gamma_p(y)E(x-y)\,dy$, правая часть состоит из элементов вида $d_p = \int\limits_S \big(b - (u_0 x_2 - v_0 x_1)\big)E(x-y)\,dy$. Не ограничивая общности, будем далее полагать $b = 1$.

3. **Особенности численной реализации алгоритма**. Функция тока $\psi(x)$ представлялась суммой трех слагаемых $\psi(x) = u_0\,\psi_U(x) + v_0\,\psi_V(x) + \gamma\psi_B(x)$, где $\psi_U(x) = x_2 + \sum c_m^u \mu_m(x)$, $\psi_V(x) = -x_1 + \sum c_m^v \mu_m(x)$ и $\psi_B(x) = \sum c_m^b \mu_m(x)$, коэффициенты этих представлений получались решением задач $\|\psi_U(x)\|^2 \to \min\limits_{c^u}$, $\|\psi_V(x)\|^2 \to \min\limits_{c^v}$ и $\|\psi_B(x) - 1\|^2 \to \min\limits_{c^b}$. Линии уровня $\psi_U(x)$ соответствуют бесциркуляционному течению со значением $\overline{w}(\infty) = \{1, 0\}$ (для присоединенного вихря в единичном круге картина линий тока приведена на рисунке 1), линии уровня $\psi_V(x)$ – бесциркуляционному обтеканию с $\overline{w}(\infty) = \{0, 1\}$, $\psi_B(x)$ – чисто циркуляционному обтеканию с $\overline{w}(\infty) = 0$ (рисунок 2).

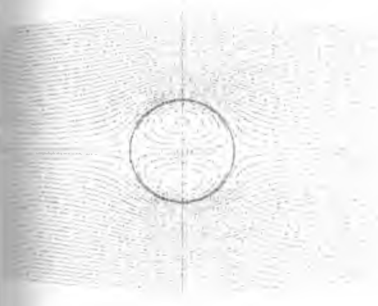

Рис.1. Линии уровня ψ_U

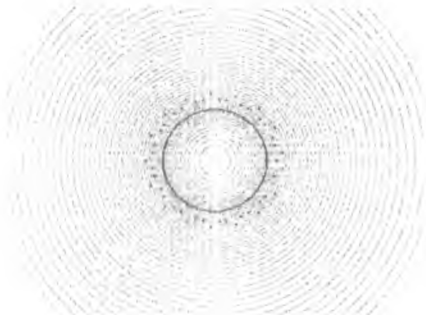

Рис.2. Линии уровня ψ_B

4. **Результаты численного эксперимента.** Для обтекания со скоростью на бесконечности $\overline{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$ и некоторой циркуляцией, за которую отвечает лишь слагаемое $\psi_B(x)$, картина получается линейной комбинацией предыдущих трех с коэффициентами u_0, v_0 и γ, соответственно. В частности, для потока, набегающего под углом $\alpha = 30^0$ ($|\overline{w}(\infty)| = 1$) и значениями $\gamma = -0.0002$ и $\gamma = -0.0004$, картины обтекания присоединенного вихря в круге приведены на рисунках 3 и 4.

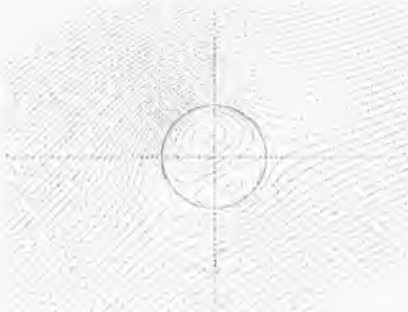

Рис. 3. α=30^0, γ= -0.0002

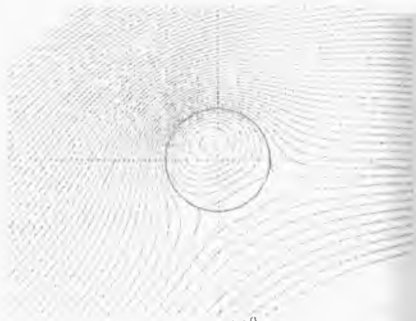

Рис. 4. α=30^0, γ= -0.0004

5. Рассмотрим внутренний вихрь с условием прилипания на границе. Представление (1) для функции тока не единственно, в частности, под интегралом к $g(y)$ можно добавить любую функцию $h(y)$ из ортогонального к $G(Q)$ подпространства в $L_2(Q)$, что дает к $\psi(x)$ нулевую в Q^+ добавку. Таким образом, общее представление для функции тока имеет вид

$$\psi_1(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \int_Q (h(y) + g(y))\, E(x-y)\, dy, \tag{2}$$

где $h(y) \in N(Q)$, $L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q)$ – разложение пространства $L_2(Q)$ в прямую сумму гармонического и ортогонального ему подпространств. Функции $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ представляют одно и тоже течение в Q^+, но они различны в Q. В силу того, что в (2) $h(y) \in N(Q)$, а $g(y)$ - гармоническая, то при $h(y) = 0$ мы получаем присоединенный вихрь с минимальной завихренностью, порождающий внешнее течение с $\overline{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$. Добавка $\psi_N(x) = \int_Q h(y) E(x-y)\, dy$ порождает вихрь в Q с условием прилипания на границе.

Для построения $h(y)$ из $N(Q)$ достаточно взять лапласиан от функции, равной нулю на границе вместе со своей нормальной производной. В частности, для функции $h_1(y) = \Delta\left((1-R^2)^2\right)$, где $R^2 = y_1^2 + y_2^2$, линии тока функции $\psi_{N_1}(x) = \int_Q h_1(y) E(x-y)\, dy$ приведены на рисунке 5.

С учетом введенных обозначений ψ_U, ψ_V, ψ_B и ψ_N функцию тока ψ_1 можно представить в виде $\psi_1 = u_0\psi_U + v_0\psi_U + \gamma\psi_B + R\psi_N$, где R – некоторая константа, отвечающая за интенсивность внутреннего вихря функции ψ_N.

Рис.5. Линии уровня $\psi_{N1}(x)$

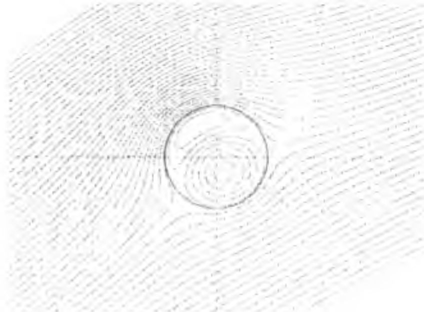

Рис. 6. α=30^0, γ= –0.0002. R=1

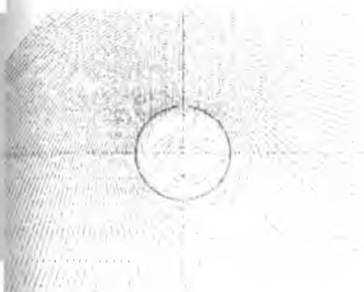

Рис. 7. α=30^0, γ= –0.0008. R=2

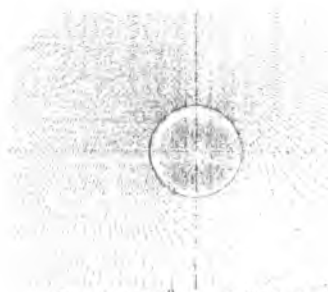

Рис. 8. α=30^0, γ= –0.0008. R=5

Для внутреннего вихря $\psi_{N_1}(x)$ с интенсивностью $R_1 = 1$ и значениями $\alpha = 30^0$ ($|\overline{w}(\infty)| = 1$) и $\gamma = -0.0002$ картина приведена на рисунке 6, с интенсивностями $R_1 = 2$ и $R_2 = 5$ при $\alpha = 30^0$ и $\gamma = -0.0008$ картины течений приведены на рисунках 7 и 8.

Во всех случаях число базисных точек M бралось равным 50, располагались они на двух окружностях вокруг Q, изображены они на рисунке 2. Алгоритм реализован на языке программирования Fortran, графика – на языке Pascal. Для счета интегралов с особенностями использовались подпрограммы пакета MS IMSL.

Работа поддержана грантом РФФИ-Юг № 03-01-96587.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978.
2. Лежнев В.Г., Данилов Е.А. Задачи плоской гидродинамики. – Краснодар: КубГУ, 2000.