УДК 512.516.5

Лежнев М.В.

ЗАДАЧА ПЛОСКОГО ОБТЕКАНИЯ С ВИХРЕВОЙ ЗОНОЙ [1]

Рассматривается задача обтекания плоского профиля S с вихревой зоной у границы.

1. Постановка задачи. Пусть $Q^- \subset R^2$ – ограниченная область с кусочно гладкой границей $\partial Q^- = S$, область течения обозначим через $Q^+ = R^2 \setminus \overline{Q^-}$, пусть некоторая область Q_1 содержит Q^-, $Q_1 \supset Q^-$, $Q = Q_1 \setminus \overline{Q^-}$.

Будем полагать, что векторное поле скоростей $\overline{w}(x) = \{ u(x), v(x)\}$, $x = (x_1, x_2) \in Q^+$ обтекающего течения удовлетворяет следующим условиям:

1) $\operatorname{div} \overline{w}(x) = 0$ в области течения;
2) $\operatorname{rot} \overline{w}(x) = 0$ в $Q^+ \setminus \overline{Q}$;
3) задана скорость на бесконечности $\overline{w}(\infty) = \{ u_0, v_0\}$,
4) граница S есть линия тока течения.

Из условия 1) следует, что в области течения Q^+ существует функция тока $\Psi(x)$, $\overline{w}(x) = \{ -\Psi_{x_2}(x), \Psi_{x_1}(x)\}$, $\operatorname{rot} \overline{w}(x) = \Delta\Psi(x)$.

Для функции $\Psi(x)$ рассмотрим представление

$$\Psi(x) = (\overline{a}, x) + \int_Q g(y)\, E(x-y)\, dy \qquad x \in Q^+,$$

где $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, $\overline{a} = \{ -v_0, u_0\}$, $g(y)$ – искомая функция, являющаяся плотностью распределения вихрей в приграничной зоне Q.

Условия 1), 2), 3) выполняются по построению. Покажем далее, что условие 4) также может быть выполнено при соответствующем выборе $g(x)$.

Из естественного условия минимальности завихренности получаем, что функция $g(x)$ принадлежит подпространству $G(Q)$ гармонических функций пространства $L_2(Q)$.

Рассмотрим ограниченную последовательность точек $\{x_B{}^n\} = \{(x_{1B}{}^n, x_{2B}{}^n)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, принадлежащую $Q^+ \setminus Q$, отделенную от ее границы, и пусть эта последовательность удовлетворяет условию единственности гармонических функций (т.е. две гармониче-

1. Работа выполнена при поддержке гранта Т02-14.1-2492 Минобразования.

ские функции, совпадающие на этой последовательности точек, совпадают тождественно). Назовем эти точки базисными.

Рассмотрим теперь систему функций

$$\gamma_B^n(x) = \ln(x - x_B{}^n)^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad x = (x_1, x_2) \in Q.$$

Имеет место следующая лемма [1].

Лемма. Система функций $\{\gamma_B^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независима и полна в подпространстве гармонических функций $G(Q) \subset L_2(Q)$.

Из леммы следует, что любая функция $g(x) \in G(Q)$ может быть аппроксимирована суммами вида

$$g^N(x) = \sum_{n=1}^{N_B} c_n \gamma_B^n(x).$$

Рассмотрим аппроксимационный функционал

$$F^N(g) = \left\| (\bar{a}, \bar{x}) - C + \sum_{n=1}^{N_B} c_n \int_Q \gamma_B^n(y)\, E(x - y)\, dy \right\|_{L_2(S)}^2 + \alpha \left\| \sum_{n=1}^{N_B} c_n \gamma_B^n(y) \right\|_{L_2(Q)}^2$$

и следующую задачу V для нахождения коэффициентов c_k.

Задача V. Найти минимизирующие коэффициенты $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{N_B})$ для функционала $F^N(g)$.

Необходимое условие экстремума приводит к следующей системе алгебраических уравнений:

$$(A^T H A + \alpha B)\, c = -A^T H\, ((\bar{a}, \overline{x^m}) - C),$$

где $A = (a_{mn})$, $a_{mn} = \int_Q \gamma_B^n(y)\, E(x^m - y)\, dy$, m – номер точки разбиения x^m контура S (зависит от способа численного интегрирования), H – диагональная матрица "шагов" по контуру S; $B = (b_{mn})$ – симметричная матрица размерности $(n \times n)$, $b_{mn} = \int_Q \gamma_B^m(x) \gamma_B^n(x)\, dx$.

2. Результаты. Ниже приведены результаты численного эксперимента обтекания пластины, для которой вихревой зоной взят полукруг с «подветренной» стороны. Для набегающего потока на бесконечности $\bar{w}(\infty) = \{0, 1\}$ на рисунках 1 и 2 и $\bar{w}(\infty) = \{1, 1\}$ – на рисунках 3 и 4; коэффициент α (при вязком члене) равен 1d–4, 1d–2, 1d–4 и 1d–1 на рисунках 1 – 4, соответственно. Алгоритм реализован на языке программирования Fortran (без использования математических пакетов и, в частности, библиотеки IMSL), графика – на языке Pascal.

Во всех случаях количество базисных точек бралось равным тридцати, $N_B = 30$.

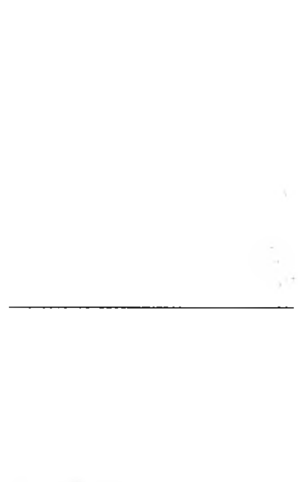

Рис 1. $\overline{w}(\infty) = \{0, 1\}$, $\alpha = 1d{-}4$

Рис 2. $\overline{w}(\infty) = \{0, 1\}$, $\alpha = 1d{-}2$

Рис 3. $\overline{w}(\infty) = \{1, 1\}$, $\alpha = 1d{-}4$

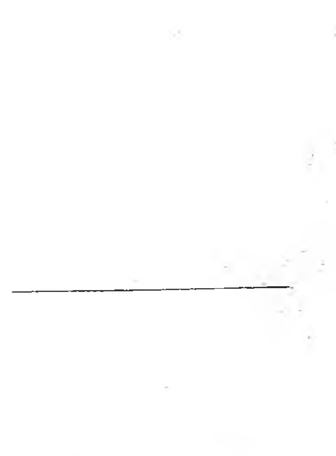

Рис 4. $\overline{w}(\infty) = \{1, 1\}$, $\alpha = 1d{-}1$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лежнев В.Г., Данилов Е.А. Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: Изд-во КубГУ, 2000