А. Д. БОЙКОВ, А. Н. ДМИТРИЕВ, Н. Д. ЕГУПОВ

АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ, ЕСЛИ ИЗВЕСТНА ЕЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть методом последовательных приближений получена параметрическая передаточная функция $W(s, t)$ анализируемой нестационарной динамической системы. Найденная один раз передаточная функция $W(s, t)$ дает возможность провести анализ нестационарной САУ.

Пусть перед нами стоит задача определения выходной реакции системы с переменными параметрами, имеющей передаточную функцию $W(s, t)$, на некоторое входное воздействие, преобразование Лапласа которого имеет вид $Y(S)$.

Тогда, используя известные правила, выражение для преобразования Лапласа для выходной реакции запишем так:

$$X(s, t) = W(s, t)\, Y(s).$$

Так же, как и при рассмотрении стационарных динамических систем, в этом случае стоит задача перехода из комплексной области в действительную. При применении классических методов, если

$$X(s, t) = W(s, t)\, Y(s) = \frac{\widetilde{M}(s, t)}{\widetilde{N}(s, t)},$$

выражение для выходного сигнала можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{M}(s_к, t)}{\left[\frac{d}{ds}\widetilde{N}(s, t)\right]_{s=s_к}} e^{s_к t},$$

где $s_к$ — корни уравнения.

При применении второй теоремы разложения Хевисайда для построения выходных реакций нестационарных динамических систем необходимо преодолеть существенные трудности, связанные с громоздкостью и сложностью вычислительного процесса.

Практически это сделать трудно, если анализируемая система имеет высокий порядок и нет возможности найти формулы соответствия между оригиналом и изображением. В последнем случае необходимо знать корни характеристического уравнения. Такая задача является трудно выполнимой без применения цифровой вычислительной машины.

Обобщенный спектральный метод позволяет избежать трудностей, связанных с построением выходных реакций нестационарных динамических систем с использованием параметрической передаточной функции.

Будем искать выходной сигнал САУ в виде ортогонального ряда. Пусть в качестве ортогонального базиса используются ортогонализированные экспоненциальные функции. Тогда общее выражение для коэффициентов ортогонального разложения выходного сигнала имеет вид

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{kn} W(s, t)\big|_{s=k+c}. \qquad (1)$$

Раскрывая выражение (1), получим:

$$c_0(t) = \alpha_{00}\mu_0(t),$$

$$c_1(t) = \alpha_{01}\mu_0(t) + \alpha_{11}\mu_1(t),$$

$$c_2(t) = \alpha_{02}\mu_0(t) + \alpha_{12}\mu_1(t) + \alpha_{22}\mu_2(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n(t) = \alpha_{0n}\mu_0(t) + \alpha_{1n}\mu_1(t) + \ldots + \alpha_{nn}\mu_n(t),$$

где α_{ij} — постоянные ортогональной системы;

c — масштабный коэффициент функции веса.

Так как числитель и знаменатель передаточной функции зависят от времени t, ортогональный спектр выходного сигнала $x(t)$ также будет зависеть от t.

В связи с тем, что для моментов выходного сигнала нестационарной динамической системы справедлива формула

$$\mu_n(t) = \mu_n^{\text{САУ}}(t)\,\mu_n^{\text{вх}},$$

где

$$\mu_n^{\text{САУ}}(t)(W = s, t)\big|_{s=n+c} \quad \text{и} \quad \mu_n^{\text{вх}} = \int_0^{\infty} y(t)\, e^{-(n+c)\,t}\, dt,$$

можно заключить, что для вычисления реакций исследуемой динамической системы на различные входные воздействия необходимо один раз вычислить моменты $\mu_n^{\text{сау}}(t)\,(n=0,\ 1,\ 2...)$ характеризующие свойства динамической системы, и для каждого входного сигнала — моменты $\mu_n^{\text{вх}}$.

Указанное свойство позволяет составить экономичный алгоритм расчета выходных реакций нестационарных САУ.

Таким образом, выходной сигнал нестационарной динамической системы с помощью спектрального метода находится в виде

$$x(t)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(t)\,\varphi_l(t).$$

Здесь был рассмотрен пример, когда в качестве ортогонального базиса используются ортогонализированные экспоненциальные функции. Методика применения ортогональных полиномов и функций Лягерра остается той же самой, что и для стационарных динамических систем [1], с той лишь разницей, что моменты выходного сигнала и, следовательно, элементы его ортогонального спектра будут зависеть от времени, и, таким образом, выходной сигнал представится в виде

$$x(t)=\sum_{l=0}^{n}c_l(t)\,L_l(t).$$

Подобная методика определения выходных реакций нестационарных линейных динамических систем не требует нахождения корней характеристического уравнения, легко поддается алгоритмизации, удобна для случая, когда используются цифровые вычислительные машины. Выходной сигнал можно всегда найти с достаточной степенью точности, что достигается простым увеличением количества членов разложения. Это не представляет сколько-нибудь существенных трудностей для реализации метода, так как для всех ортогональных систем существуют удобные рекуррентные формулы, позволяющие найти необходимое количество функций ортогональной системы.

Для вероятностного анализа, а также для построения выходных реакций динамических систем необходимо знать выражение для импульсной переходной функции по переменной $\lambda=t-\tau$, где τ — момент приложения импульса.

В целях иллюстрации найдем разложение импульсной переходной функции по переменной λ в виде обобщенного ряда Фурье, составленного из функций Лягерра.

Для этой цели запишем выражение для передаточной функции нестационарной системы

$$W(s,\,t)=\int_0^{\infty}k(t,\,t-\lambda)\,e^{-s\lambda}\,d\lambda=\frac{M(s,\,t)}{N(s,\,t)}\,.$$

По аналогии со стационарными динамическими системами выражение для взвешенных моментов импульсной переходной функции имеет вид

$$\left[\frac{d^l}{ds^l} W(s, t)\right]_{c=s} = \frac{d^l}{dc^l} \int\limits_0^\infty k(t, t-\lambda) e^{-c\lambda} d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^\infty k(t, t-\lambda) \frac{d^l}{dc^l} e^{-c\lambda} \lambda^l d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^\infty \lambda^l k(t, t-\lambda) e^{-c\lambda} d\lambda = (-1)^l \mu_l(t).$$

Общая формула для коэффициентов ортогонального разложения импульсной переходной функции по переменной λ запишется так:

$$c_l(t) = \int\limits_0^\infty k(t, t-\lambda) L_l(\lambda) d\lambda.$$

Та же формула, записанная через моменты $\mu_l(t)$, принимает форму

$$c_l(t) = \sum_{n=0}^{l} \frac{l!(-1)^{l-n}}{[(i-n)!]^2 n!} \mu_{l-n}(t).$$

Формула для определения моментов импульсной переходной функции имеет вид

$$(-1)^l \mu_l(t) = \int\limits_0^\infty \lambda^l k(t, t-\lambda) e^{-c\lambda} d\lambda = \left[\frac{d^l}{ds^l} W(s, t)\right]_{s=c} =$$

$$= \frac{\gamma_l(t) - \mu_0(t)\beta_l(t)}{\beta_0(t)} - \frac{1}{\beta_0(t)}[l\mu_1(t)\beta_{l-1}(t) + \ldots$$

$$\ldots + C_l^m \mu_m(t)\beta_{l-m}(t) + \ldots + l\mu_{l-1}(t)\beta_1(t)],$$

$$\mu_l(t) = W^{(l)}(s, t)\big|_{s=c};$$

$$\gamma_l(t) = M^{(l)}(s, t)\big|_{s=c};$$

$$\beta_l(t) = N^{(l)}(s, t)\big|_{s=c}.$$

Таким образом, импульсная переходная функция нестационарной динамической системы по переменной λ представляется с помощью ортогонального метода в одном из следующих видов: для полиномов Лягерра

$$k(t, t-\lambda) = k\sum_{k=0}^{\infty} c_l'(t)\overline{L}_l(\lambda)$$

для функций Лягерра

$$k(t, t-\lambda) = k \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t) L_i(t)$$

Если в качестве ортогонального базиса используются ортогонализированные экспоненциальные функции, то импульсная переходная функция может быть представлена в виде

$$k(t, t-\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t) \varphi_i(\lambda).$$

где

$$c_i(t) = \sum_{k=0}^{i} \alpha_{kn} W(s, t)\big|_{s=k+c}.$$

В заключение отметим, что как импульсная переходная функция, так и выходной сигнал нестационарной динамической системы, могут быть представлены в виде интегроинтерполяционных многочленов в моментах [1].

Формула для случая, когда находится импульсная переходная функция, имеет вид

$$k(t, t-\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} W(s, t)\big|_{s=k+c} \psi_{k,n}(e^{-\lambda})$$

или

$$k(t, t-\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k(t) \psi_{k,n}(\lambda).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8. «Машиностроение». 1968.