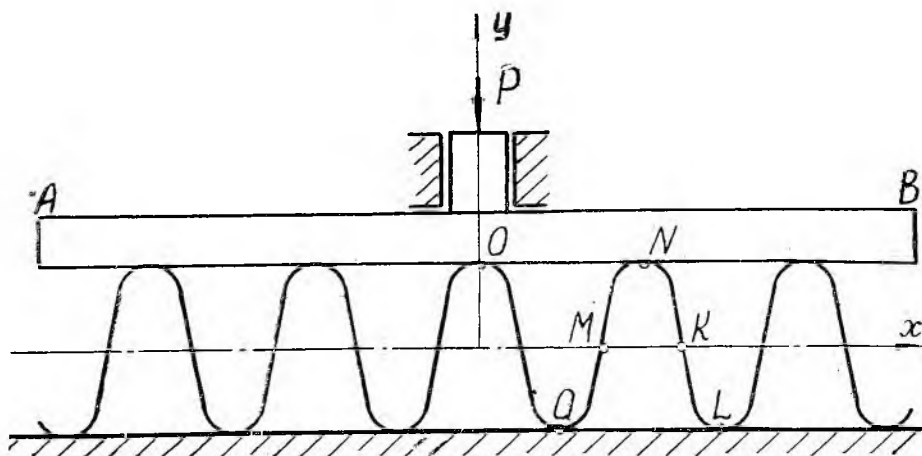


И. М. ВОЛК, Г. А. НОВИКОВ

### ЦИКЛИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ ГОФРИРОВАННОЙ ПРОКЛАДКИ МЕЖДУ ДВУМЯ ЖЕСТКИМИ ПЛИТАМИ

Исследован процесс циклического поперечного изгиба трехслойной консоли с гофрированной прокладкой\*. Взаимное прижатие слоев и значения геометрических параметров прокладки после сжатия предполагались заданными. Однако, если решать задачу о сжатии гофрированной прокладки между двумя жесткими плитами (фиг. 1), то с учетом принятых допущений эти величины

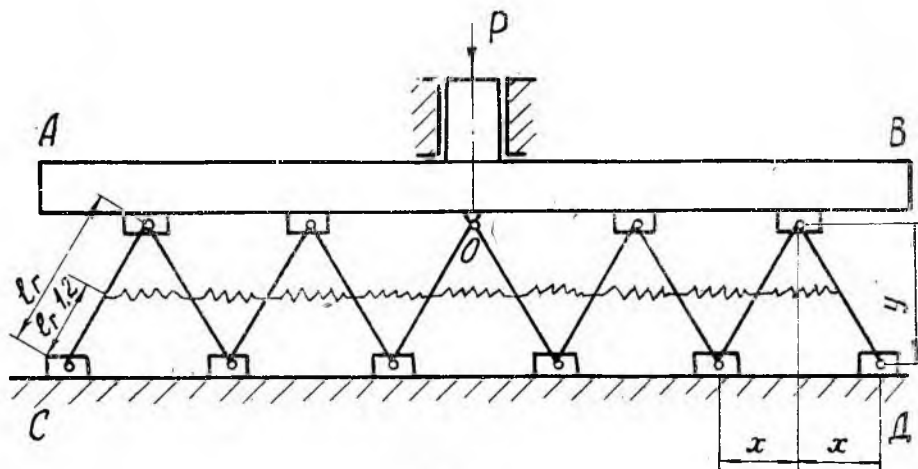


Фиг. 1.

\* И. М. Волк, Г. А. Новиков. «Поперечный изгиб трехслойной консоли с гофрированной прокладкой». См. настоящий сборник, стр. 5.

могут быть определены расчетным путем. Поскольку на практике возможны случаи не только монотонного, но и пульсирующего сжатия гофра, задача решается применительно к циклическому сжатию.

**Расчетная схема.** Предполагается, что при сжатии прокладки вершина  $O$  гофра, находящаяся на вертикальной оси симметрии системы, остается неподвижной относительно плиты  $AB$ , а остальные вершины могут перемещаться вправо и влево от нее, вследствие чего изменяются высота и шаг гофра. При этом связи, наложенные на прокладку, таковы, что изменение длины каждого элемента  $QNL$  гофра по сравнению с изменением его высоты и шага ничтожно малы. Последнее обстоятельство дает основание принять расчетную схему, изображенную на фиг. 2.



Фиг. 2.

В этой схеме трение вершин гофра о плиты заменено трением некоторых ползунов с тем же коэффициентом трения, что и у гофра, причем связь между ползунами осуществляется при помощи шарнирно-прикрепленных к ним абсолютно жестких стержней. Упругое сопротивление каждого элемента  $QNL$  гофра изменению его высоты и шага схематизируется пружиной, подобранной так, чтобы под действием одинаковых сил, направленных вдоль оси  $x$ , изменение расстояния между соседними ползунами равнялось изменению соответствующего расстояния между соседними вершинами гофровой прокладки. При этом естественно считать, что все ползуны, стержни и пружины одинаковы и внешняя нагрузка симметрична относительно ползунов. Весом ползунов, стержней и пружин пренебрегаем, а вес плиты  $AB$  включаем во внешнюю нагрузку.

Приняв такую расчетную схему, условимся в следующих обозначениях, считая число элементов  $QNL$  гофра достаточно большим:

$n$  — число ползунов на стороне  $AB$ ;  
 $n + 2$  — число ползунов на стороне  $CD$ ;  
 $f$  — коэффициент трения ползуна о плиту;  
 $c$  — жесткость пружины;  
 $x_0$  и  $y_0$  — значения  $x$  и  $y$  при  $P = 0$ ;  
 $P$  — полная внешняя нагрузка.

Связь между внешней нагрузкой и деформацией при загрузке установим исходя из принципа возможных перемещений, приняв в качестве обобщенной координаты переменную  $x$  (фиг. 2). При этом учтем, что между переменными  $x$  и  $y$  существует зависимость  $x^2 + y^2 = l^2$ , из которой вытекает следующее соотношение между вариациями переменных:

$$x\delta x + y\delta y = 0, \quad (2.1)$$

являющееся уравнением связи.

Давление на каждый ползун на стороне  $AB$  равно  $P/(n + 1)$ , а на стороне  $CD$  —  $P/(n + 2)$ . Возможные перемещения ползунов, отсчитываемые от шарнира  $O$  в одном направлении (вправо или влево), образуют следующую последовательность значений на стороне  $CD$ :  $\delta x, 3\delta x, \dots, (n + 1)\delta x$ , а на стороне  $AB$  —  $2\delta x, 4\delta x, \dots, n\delta x$ .

Сумма работ всех сил трения на возможных перемещениях определяется равенством:

$$\delta A_{\text{тр}} = -\frac{fP}{n+1}(2\delta x + 4\delta x + \dots + n\delta x) - \frac{fP}{n+2}[\delta x + 3\delta x + \dots + (n+1)\delta x],$$

откуда получаем:

$$Q_{\text{тр}} = -f_{\text{пр}}P, \quad (2.2)$$

где

$$f_{\text{пр}} = \frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+1)}f. \quad (2.3)$$

Здесь  $Q_{\text{тр}}$  — обобщенная сила, соответствующая силам трения, а величину  $f_{\text{пр}}$  можно трактовать, как некий приведенный коэффициент трения.

Число пружин равно  $2n + 1$ . Удлинение каждой пружины составляет  $x - x_0$ , следовательно, потенциальная энергия всех пружин выражается равенством

$$П_{\text{упр}} = \frac{1}{2}c(2n+1)(x-x_0)^2,$$

откуда получаем следующее выражение для обобщенной силы, соответствующей силам упругости пружин:

$$Q_{\text{упр}} = -c_{\text{пр}}(x - x_0), \quad (2.4)$$

где

$$c_{\text{пр}} = (2n + 1)c \quad (2.5)$$

и параметр  $c_{пр}$  можно трактовать как некий приведенный коэффициент жесткости.

Работа внешней силы  $P$  на возможном перемещении  $\delta x$  равна  $P(x/y)\delta x$ , из чего следует, что обобщенная сила, соответствующая этой нагрузке  $P$ , равна:

$$Q_p = \frac{x}{y} P. \quad (2.6)$$

Принцип возможных перемещений

$$Q_p + Q_{тр} + Q_{упр} = 0$$

в силу равенств (2.2), (2.4) и (2.6) приводит к следующему результату:

$$P \left( \frac{x}{y} - f_{пр} \right) = c_{пр} (x - x_0), \quad (2.7)$$

где  $f_{пр}$  и  $c_{пр}$  определены равенствами (2.3) и (2.5).

Заметив, что  $y = y_0 + \Delta y$ , где  $\Delta y$  — деформация системы в направлении силы  $P$ , из (2.7) получаем окончательно:

$$\vec{P} = c_{пр} y_0 \frac{\sqrt{h^2 - (1 + \varepsilon_y)^2} - \sqrt{h^2 - 1}}{\sqrt{h^2 - (1 + \varepsilon_y)^2} - f_{пр} (1 + \varepsilon_y)} (1 + \varepsilon_y), \quad (2.8)$$

где

$$\varepsilon_y = \Delta y / y_0; \quad h = l_r / y_0.$$

Введенные понятия  $Q_p$ ,  $Q_{тр}$  и  $Q_{упр}$ , определенные равенствами (2.2), (2.4) и (2.6), позволяют трактовать деформацию рассматриваемой системы как прямолинейное перемещение некоторого груза по плоскости. Этому перемещению препятствуют силы  $Q_{тр}$  и  $Q_{упр}$ , а  $Q_p$  является движущей силой. Отсюда, в частности, следует: чтобы была возможна деформация системы под действием какой-либо внешней нагрузки  $P$ , достаточно выполнить условие  $Q_p \geq Q_{тр}$ , эквивалентное неравенству:

$$\frac{x_0}{y_0} \geq f_{пр} \quad (2.9)$$

**Связь между внешней нагрузкой и деформацией при разгрузке и общий закон для всего процесса циклической деформации.** Распределение действующих сил при разгрузке и загрузке отличается только тем, что при разгрузке силы  $Q_{тр}$  и  $Q_{упр}$  направлены в противоположные стороны. На основании этого утверждения получаем:

$$\vec{P} = c_{пр} y_0 \frac{\sqrt{h^2 - (1 + \varepsilon_y)^2} - \sqrt{h^2 - 1}}{\sqrt{h^2 - (1 + \varepsilon_y)^2} + f_{пр} (1 + \varepsilon_y)} (1 + \varepsilon_y). \quad (3.1)$$

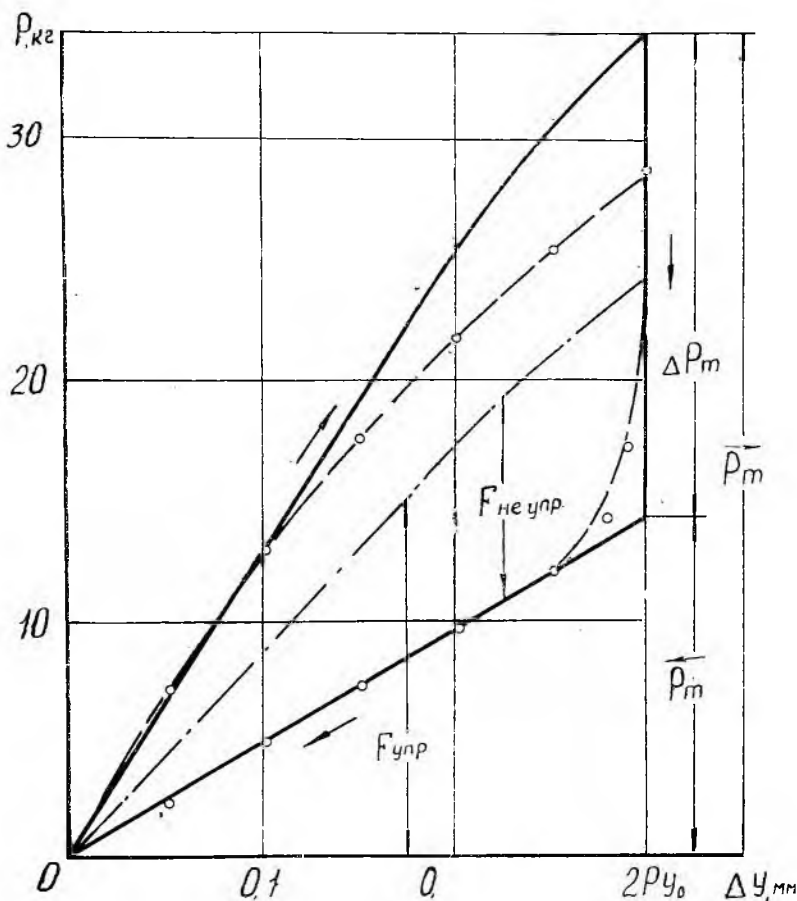
Объединив (2.8) и (3.1) и освободившись от иррациональности

В знаменателях, получим для всего процесса циклической деформации следующий закон:

$$P = c_{\text{пр}} \gamma_0 \frac{A(\varepsilon_y) - A(0)}{A^2(\varepsilon_y) - B^2(\varepsilon_y)} [A(\varepsilon_y) \pm B(\varepsilon_y)] (1 + \varepsilon_y).$$

$$A(\varepsilon_y) = \sqrt{h^2 - (1 + \varepsilon_y)^2}; \quad B(\varepsilon_y) = f_{\text{пр}} (1 + \varepsilon_y). \quad (3.2)$$

В квадратной скобке положительному знаку соответствует загрузка, а отрицательному — разгрузка.



Фиг. 3.

**Петля гистерезиса, упругое и неупругое сопротивление.** Допустим, что загрузка производится от  $\varepsilon_y = 0$  до  $\varepsilon_y = 2\rho$  ( $\rho$  — амплитуда относительной циклической деформации). При этом при загрузке сила  $P$  изменяется от нуля до  $\vec{P}_m$ , а деформация при разгрузке начнется лишь при уменьшении силы  $\vec{P}$  до величины  $\overleftarrow{P}_m$ .

(фиг. 3). Величины  $\vec{P}_m$  и  $\overleftarrow{P}_m$  определяются равенствами (2.8) и (3.1) после подстановки  $\varepsilon_y = 2\rho$ . Следовательно, при  $\varepsilon_y = 2\rho$  имеет место следующий скачок в силе:

$$\Delta P_m = 2c_{np} y_0 \frac{[A(2\rho) - A(0)]}{A^2(2\rho) - B^2(2\rho)} f_{np} \cdot (1 + 2\rho)^2. \quad (4.1)$$

Таким образом, петля гистерезиса имеет форму, изображенную сплошной линией на фиг. 3. Упругое и неупругое сопротивления выражаются равенствами:

$$F_{упр} = c_{np} y_0 \frac{[A(\varepsilon_y) - A(0)] A(\varepsilon_y)}{A^2(\varepsilon_y) - B^2(\varepsilon_y)} (1 + \varepsilon_y);$$

$$F_{неупр} = c_{np} \cdot y_0 \cdot f_{np} \frac{A(\varepsilon_y) - A(0)}{A^2(\varepsilon_y) - B^2(\varepsilon_y)} (1 + \varepsilon_y)^2. \quad (4.2)$$

Площадь петли гистерезиса определяется равенством:

$$W = 2 \int_0^{2\varepsilon y_0} F_{неупр} d(\Delta y),$$

которое после интегрирования приводит к следующему результату:

$$W = \frac{c_{np}}{l_r \sqrt{1 + f_{np}^2}} \left\{ (l_r^2 - m^2) \left[ x_0 \ln \frac{(m - x_0)(m + \alpha)}{(m + x_0)(m - \alpha)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + m \ln \frac{m^2 - \alpha}{m_0^2 - x_0^2} \right] - m(x_0 - \alpha) \right\}, \quad (4.3)$$

где

$$m = \frac{l_r f_{np}}{\sqrt{1 + f_{np}^2}}; \quad \alpha = \sqrt{l_r^2 - y_0^2(1 + 2\rho)^2}; \quad x_0 = \sqrt{l_r^2 - y_0^2}.$$

Как видно из (4.2) и (4.3), форма и площадь петли определенным образом зависят от геометрических параметров  $x_0$ ,  $y_0$ , числа  $n$ , элементов  $QNL$  гофрированной прокладки, коэффициентов жесткости  $c$  и трения  $f$ , меняя которые, можно получить петли различных форм и площадей.

**Определение жесткости  $c$  гофра.** В полученных выше соотношениях в качестве параметра содержится жесткость  $c$  гофра, зависящая от геометрических размеров и материала последнего. Для ее определения рассмотрим деформацию кривого стержня  $MNK$  (фиг. 4) под действием сил  $Q$ . При этом заметим, что  $\beta = 90 - \alpha_0$ , а радиус кривизны  $r$  оси стержня и длина прямолинейного участка  $s$  соответственно связаны с высотой гофра  $y_0$  и шагом  $2x_0$  соотношениями:

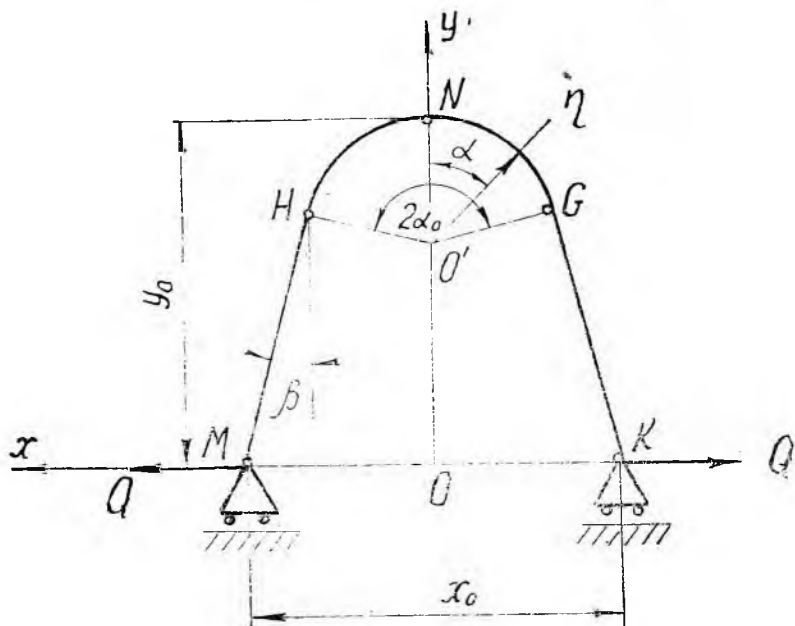
$$s = \frac{y_0 - 2r(1 - \sin \beta)}{2 \cos \beta}; \quad r = \frac{x_0 \cos \beta - y_0 \sin \beta}{2(1 - \sin \beta)} \quad (5.1)$$

Увеличение расстояния между точками  $M$  и  $K$  определим, пользуясь интегралом Мора для изгиба:

$$\Delta x = \frac{2Q}{E_r I_r} \left\{ \int_0^s z^2 \sin^2 \alpha_0 dz + \int_0^{\alpha_0} \left[ \frac{1}{2} y_0 - r(1 - \cos \alpha) \right]^2 r d\alpha \right\},$$

откуда, приняв, что  $c = Q/\Delta x$ , получим

$$c = \frac{E_r I_r}{2 \left[ \frac{s^3}{3} \sin^2 \alpha_0 + \frac{1}{4} y_0^2 r \alpha_0 - y_0 r^2 (\alpha_0 - \sin \alpha_0) + r^3 \left( \frac{3}{2} \alpha_0 - 2 \sin \alpha_0 + \frac{1}{4} \sin 2\alpha_0 \right) \right]}$$

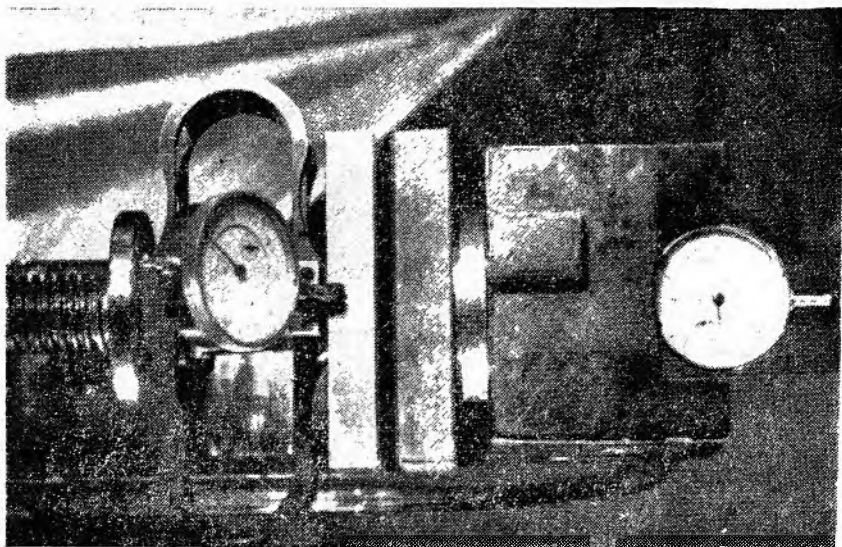


Фиг. 4.

( $E_r$  — модуль Юнга материала гофра;  $I_r$  — момент инерции поперечного сечения гофра относительно оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента). Экспериментальная проверка показала справедливость этого соотношения.

**Экспериментальная петля гистерезиса при циклическом сжатии гофрированной прокладки между двумя жесткими плитами.** Проверка правильности предпосылок и соотношений, полученных при решении задачи, производилась сравнением расчетных и опытных, петель гистерезиса, снимаемых на установке (фиг. 5).

Усилие, создаваемое винтовым прессом и измеряемое динамометром типа ДС-0,2, через подвижную плиту сжимает гофрированную прокладку в поперечном направлении. Величина деформации измеряется индикатором типа ИЧ-10. Равномерность сжатия обеспечивается параллельностью рабочих поверхностей плит. При циклическом сжатии гофрированной прокладки до упругих деформаций  $\Delta y = 0,25 \div 0,5$  мм снимались петли гистерезиса, одна из которых изображена пунктиром на фиг. 3. Гофрированная прокладка, изго-



Фиг. 5.

товленная прокаткой листа 60С2А между двумя шестернями, имеет следующие геометрические размеры (фиг. 4):

$$y_0 = 5,25 \text{ мм}; \quad 2x_0 = 17,2 \text{ мм}; \quad L = 22 \text{ мм}; \quad 2a_r = 0,26 \text{ мм}; \\ \beta = 50^\circ; \quad n = 4.$$

Для построения аналитической петли гистерезиса по формуле (3.2) необходимо знать коэффициент трения  $f$ . Однако его величина точно неизвестна. При исследовании не ставилась специально цель нахождения коэффициентов трения, но определение их порядка и пределов изменения все же производилось. Для этого по экспериментальной петле гистерезиса для различных значений деформации  $\Delta y$  замерялись упругая и неупругая составляющие сопротивлений (фиг. 3). Затем по формулам (4.2) и (2.3) определялся коэффициент трения  $f$ , средняя величина которого равна  $0,13 \div 0,15$ . Значение  $f$ , определенное для различных деформаций примерно одинаково, что косвенно подтверждает правильность полученных соотношений. Зная  $f$ , для указанной выше гофрированной прокладки строим теоретическую петлю гистерезиса, изобра-



женную на фиг. 3 сплошной линией. Сравнение показывает, что опытная петля, в основном, совпадает с расчетной, но имеются некоторые отклонения, а именно:

переход от этапа загрузки к разгрузке происходит плавно, а не скачкообразно. Это, вероятно, является следствием неравномерности сжатия из-за некоторых неточностей, допущенных при изготовлении прокладки и установке плит;

начиная с  $\Delta y = 0,15$  мм, экспериментальная кривая нагрузки отклоняется от расчетной, что объясняется влиянием малого изменения длины гофра.

Указанные отклонения сравнительно невелики, а площади петель гистерезиса совпадают с точностью до 20%. Учитывая нестабильность процессов трения, это вполне удовлетворительное совпадение. Таким образом, проведенные эксперименты подтверждают правильность рабочих гипотез и соотношений, полученных при решении задачи.

## ВЫВОДЫ

При циклическом сжатии гофрированной прокладки между двумя жесткими плитами сила сжатия  $\vec{P}$  и деформация гофра  $\Delta y$  связаны соотношением (3.2), которое справедливо лишь при условии

$$\frac{x_n}{y_0} \geq f_{\text{пр}}$$

Сила сжатия определенным образом зависит не только от величины деформации, но и от модуля упругости материала гофра, геометрических размеров последнего (высота, шаг, размеры поперечного сечения), коэффициента трения  $f$  и числа  $n$  волн в прокладке.

Попутно установлено, что при циклическом сжатии прокладки рассеивается значительная часть механической энергии, величина которой, определяемая равенством (4.3), зависит от всех указанных выше параметров. Варьируя последними, можно управлять величиной рассеянной энергии при проектировании конструкций, подвергаемых пульсирующему сжатию.

В заключение заметим, что принятый метод решения задачи может быть распространен и на случай, когда несущие слои трехслойной конструкции с гофрированной прокладкой имеют криволинейную форму.