И. Д. ЭСКИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГО-ФРИКЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ И С ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА В ФОРМЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

1. Постановка задачи

В работе [1] рассмотрены вынужденные периодические колебания системы с одной степенью свободы при наличии нелинейности гистерезисного типа в форме параллелограмма около ненагруженного положения системы (q=0) под действием гармонической возбуждающей силы

$$F(t) = F_0 \sin(pt + \varepsilon) \quad (F_0 > 0),$$

удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} &\dot{q} < 0 \quad (t_0 < t < t_2); \\ &\dot{q} > 0 \quad (t_2 < t < t_4), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\dot{q}$ — обобщенная скорость системы;

t_0, t_2, t_4 — последовательные моменты времени, когда система находится в крайних положениях $q = q_0$ и $q = -q_0$; ($q_0 > 0$) и q — обобщенное перемещение системы.

В предлагаемой статье исследуются вынужденные периодические колебания этой же системы около положения $q=0$, удовлетворяющие более общим условиям:

$$\begin{aligned} &\dot{q} < 0 \, (t_1 < t < t_2); \quad q \leqslant q_0 \, (t_0 < t < t_1); \\ &\dot{q} > 0 \, (t_3 < t < t_4); \text{ и } \quad |q| \leqslant q_0 \, (t_2 < t < t_3), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где t_1 и t_3 — моменты времени, в которые происходит смена закона изменения обобщенной силы Q внутреннего сопротивления системы. В эти моменты времени система будет находиться в положениях $q=q_1$ и $q=q_3$, являющихся абсциссами вершин A_1 и A_3 параллелограмма (см. рис. 1).

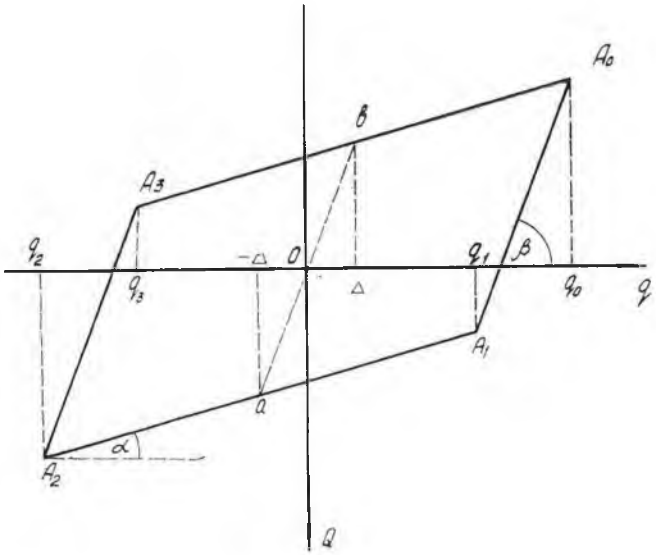


Рис. 1.

Так как решение, полученное в [1,], справедливое и в данном случае, для расчетного исследования используются ранее найденные соотношения, определяющие относительную амплитуду

$$\mu = [2H\lambda^2(D_3/D) - 1]/\delta \tag{1.3}$$

сдвига фаз ψ_0 в положении $q = q_0$:

$$\cos\psi_0 = 2H_1(\lambda/\delta)(D_1/D); \quad \sin\psi_0 = -2H_1(\lambda/\delta)(D_2/D), \tag{1.4}$$

а также трансцендентное уравнение для определения промежутка безразмерного времени τ

$$4H_1^2(\lambda/\delta)^2[(D_1/D)^2 + (D_2/D)^2] - 1 = 0 \tag{1.5}$$

и законы движения системы:

$$\begin{aligned} z &= M_1\sin\lambda\vartheta + N_1\cos\lambda\vartheta + I_1 + H_2\sin(\eta\vartheta + \psi_0); \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau); \\ z &= M_2\sin\Theta + N_2\cos\Theta + I_2 - H_3\sin(\eta\Theta + \Theta_0); \quad (0 \leqslant \Theta \leqslant \varphi_n) \end{aligned} \tag{1.6}$$

В приведенных выше соотношениях положено:

$$\eta = p/k; \quad \lambda = \omega/k; \quad \delta = L/R; \quad \mu = k^2q_0/L; \quad z = k^2q/L;$$

$$L = \frac{F_0}{M}; \quad R = (\omega^2 - k^2)\,\Delta; \quad \tau = k(t_1 - t_0); \quad \varphi_n = (n\pi/\eta) - \tau;$$

$$\psi_0 = pt_0 + \varepsilon; \quad H_1 = 1/(\lambda^2 - 1); \quad H_2 = 1/(\lambda^2 - \eta^2); \quad H_3 = 1/(\eta^2 - 1);$$

$$\vartheta = k(t - t_0); \quad \Theta = k(t - t_0); \quad \Theta_0 = \psi_0 + \eta\tau; \quad I_1 = \delta\mu - H_1;$$

$$I_2 = 1/\delta; \quad M_1 = H_2(\eta/\lambda)\cos\psi_0; \quad N_1 = (\delta\mu + 1)/(\delta\lambda^2) - H_2\sin\psi_0;$$

$$M_2 = -[(\mu + 1/\delta + H_3\sin\psi_0)\cos\varphi_n - \eta H_3\cos\psi_0\sin\varphi_n];$$

$$A_1 = 1 - \cos\lambda\tau; \quad A_2 = 1 + \cos\varphi_n; \quad A_3 = \sin\lambda\tau - \lambda\sin\varphi_n;$$

$$B_1 = \lambda H_2(\cos\lambda\tau - \cos\eta\tau); \quad B_2 = (H_3/\lambda)(\cos\eta\tau + \cos\varphi_n);$$

$$B_3 = H_2(\eta\sin\eta\tau - \lambda\sin\lambda\tau) + H_3(\eta\sin\eta\tau - \sin\varphi_n);$$

$$C_1 = H_2(\eta\sin\lambda\tau - \lambda\sin\eta\tau); \quad C_2 = (H_3/\lambda)(\sin\eta\tau - \eta\sin\varphi_n);$$

$$C_3 = \eta H_2(\cos\lambda\tau - \cos\eta\tau) - \eta H_3(\cos\eta\tau + \cos\varphi_n);$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & A_1 & B_1 \\ 1 & A_2 & B_2 \\ 0 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & A_1 & C_1 \\ 1 & A_2 & C_2 \\ 0 & A_3 & C_3 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & B_1 & C_1 \\ 1 & B_2 & C_2 \\ 0 & B_3 & C_3 \end{vmatrix};$$

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

где η — относительная частота возмущающей силы; λ^2 — относительная жесткость системы; δ — параметр трения; z — относительное перемещение системы; τ — безразмерный промежуток времени, необходимый для того, чтобы система переместилась из положения $q = q_0$ в положение $q = q_1 = q_0 - 2\Delta$, причем в этих положениях обязательно произошла смена закона изменения обобщенной силы Q (Δ см. на рис. 1); ω — парциальная частота, соответствующая большей жесткости системы; κ — парциальная частота, соответствующая меньшей жесткости системы; M — обобщенная масса системы; $n = \frac{T\eta}{\pi} = 1, 3, 5 \ldots$ —; Т — безразмерный период колебания системы.

Таким образом, для решения поставленной задачи остается в пространстве параметров λ, η и δ определить области существования периодических решений (1.6), в которых уравнение (1.5) имеет вещественные корни в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant n\pi/\eta$ и выполняются неравенства (1.2), в новых обозначениях принимающие вид

$$dz/d\theta > 0 \, (0 \leqslant \theta \leqslant \varphi_n) \quad \text{и} \quad z \leqslant \mu \, (0 \leqslant \vartheta \leqslant \tau). \tag{1.7}$$

Кроме того, нужно найти эти решения, определяющие законы движения системы, а также зависимости безразмерных характеристик колебаний системы μ и τ от параметров λ, η, δ и определить резонансные значения относительной амплитуды $\mu = \mu_{\max}$ и соответствующие им значения относительной резонансной частоты $\eta = \eta_p$. Затем определить область параметра δ, где величина резонансной относительной амплитуды $\mu_{\max}$ ограничена.

2. Результаты численного решения на ЭВМ («Урал-2»)

Случай вырождения параллелограмма в отрезок прямой ab (см. рис. 1) возможен лишь тогда, когда при колебаниях выполняется условие

$$F_0/|\operatorname{tg}\beta - Mp^2| \leqslant \Delta. \qquad (2.1)$$

Нас интересуют только те значения параметров системы, которые находятся вне области (2.1). Для любых наперед заданных значений величин λ, δ и n ($\lambda>1$; $\delta>0$; $n=1, 3, 5,..$) значения параметра η должны удовлетворять неравенствам:

а) $\eta_1 = \sqrt{\lambda^2-(\lambda^2-1)\delta} \leqslant \eta \leqslant \eta_2 = \sqrt{\lambda^2+(\lambda^2-1)\delta}$, если $\delta \leqslant \lambda^2/(\lambda^2-1)$;

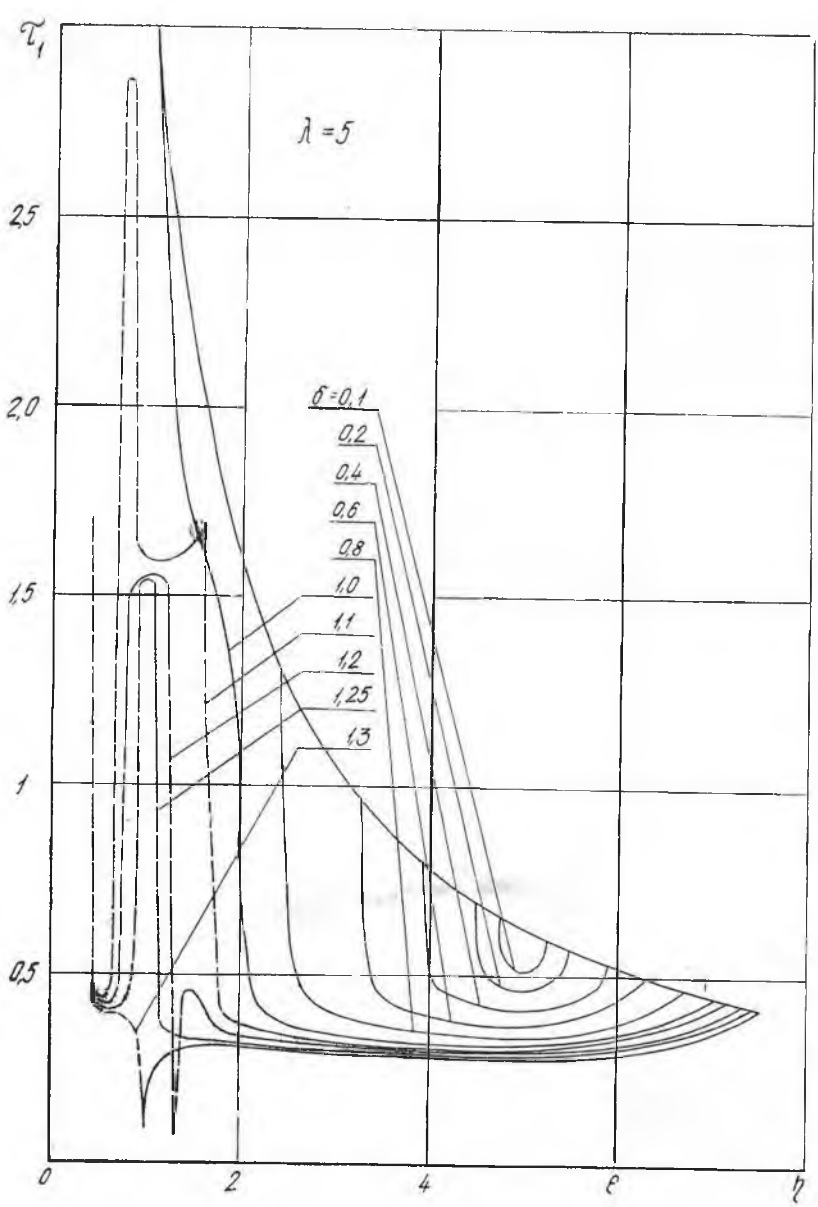
б) $0 < \eta \leqslant \eta_2$, если $\delta > \lambda^2(\lambda^2-1)$. (2.2)

При указанных значениях η расчеты проведены для $n=1$ и $\lambda = 1{,}6;\ 2;\ 3;\ 5;\ 10;\ 27;$
$\delta=0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}25;\ 1{,}3$, охватывающих всю практически важную область значений этих параметров, а также для $n=3{,}5$; $\lambda=1{,}6\div5$; $\delta=0{,}2\div1{,}2$.

На ЭВМ решалось уравнение (1.5), и для всех найденных вещественных корней τ вычислялись относительная амплитуда μ, величины, определяющие сдвиг фаз $\cos\psi_0$ и $\sin\psi_0$, и законы изменения перемещений и скорости систем $z(\vartheta)$, $\dot{z}(\vartheta)$, $z(\Theta)$, $\dot{z}(\Theta)$, по которым затем проверялось выполнение условий (1.1) и (1.7).

Результаты решения уравнения (1.5) для $n=1$ убеждают в том, что для всех значений параметров λ, δ и η, удовлетворяющих пункту (а) критерия (2.2), уравнение (1.5) имеет только один вещественный корень τ, удовлетворяющий условиям (1.1). При значениях $n=1$, λ, δ и η, соответствующих пункту (б) критерия (2.2), и $n=3;\ 5$; $\lambda=1{,}6\div5$; $\delta=0{,}2\div1{,}2$ и η, удовлетворяющих обоим неравенствам (2.2) в интервале $\eta^*<\eta<\eta_2$ (η^* — нижняя граница области единственности решения уравнения (1.5), лежащая в интервале $1<\eta^*<\lambda$), уравнение (1.5) в интервале $0<\tau<\frac{n}{\eta}$ имеет только один вещественный корень τ_1.

В этом случае для $n=1$ и η, лежащих в интервале $1<\eta<\eta_2$, первый вещественный корень τ_1 также удовлетворяет условиям (1.1), а в интервале $0<\eta<1$ имеются области, где τ_1 удовлетворяет условиям (1.7) (см. рис. 2). На рис. 2 пунктиром отмечены области, где τ_1 не удовлетворяет этим условиям. Из первых пяти вещественных корней $\tau_1<\tau_2<\tau_3<\tau_4<\tau_5$ в интервале $0<\eta<\eta^*$ корни τ_3 и τ_5 также удовлетворяют условиям (1.7). В случае $n=3{,}5$ все найденные вещественные корни τ не удовлетворяют условиям (1.7) и, следовательно, более жестким условиям (1.1). Поэтому для указанных значений параметров λ, δ и η невозможны субгармонические движения системы ($n=3;\ 5$), удовлетворяющие условиям задачи.



τ_1
$\lambda = 5$
2,5
2,0
1,5
1
0,5
0
2
4
6
η
$\delta = 0{,}1$
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,1
1,2
1,25
1,3

Рис. 2.

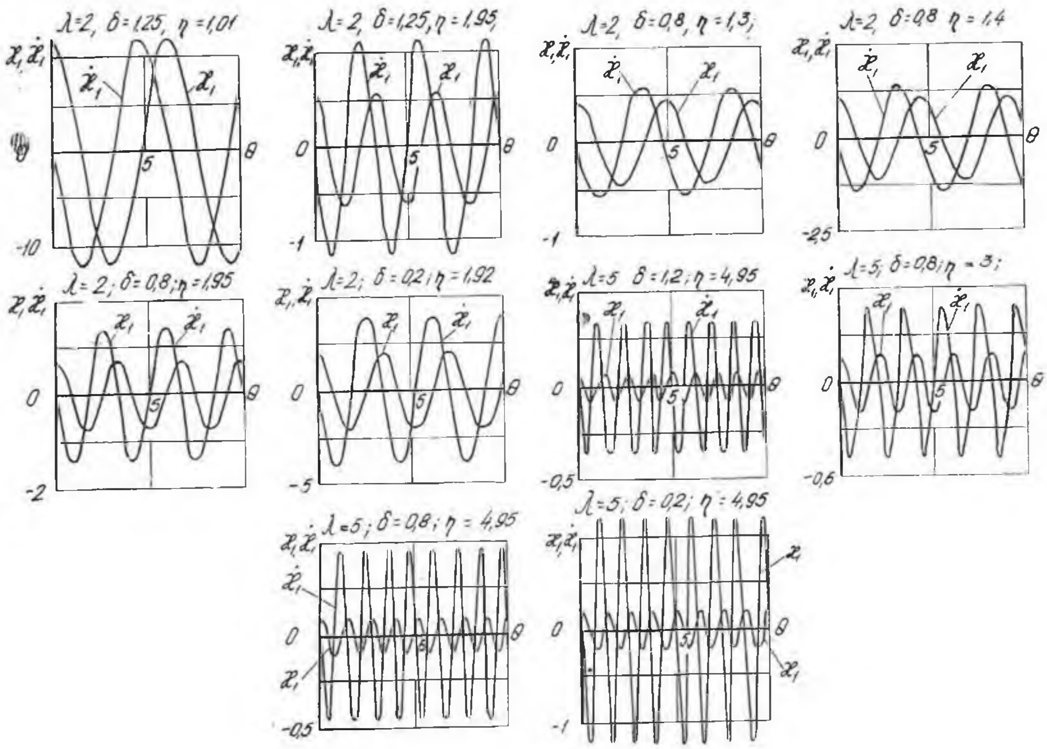

λ=2, δ=1,25, η=1,01
λ=2, δ=1,25, η=1,95
λ=2, δ=0,8, η=1,3;
λ=2, δ=0,8 η=1,4
λ=2; δ=0,8; η=1,95
λ=2; δ=0,2; η=1,92
λ=5 δ=1,2; η=4,95
λ=5; δ=0,8; η=3;
λ=5; δ=0,8; η=4,95
λ=5; δ=0,2; η=4,95
x₁, ẋ₁
x₁
ẋ₁
θ
0
5
-10
-1
-2,5
-2
-5
-0,5
-0,6

Рис. 3.

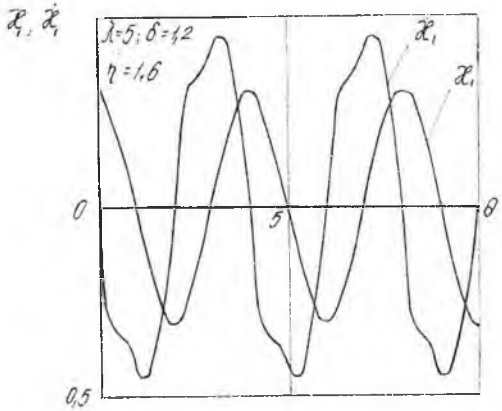


Рис. 4.

Отметим, что из всех возможных движений системы в предлагаемой работе рассматривается только класс движений, удовлетворяющих условию, $dz/d\Theta<0$ $(O\leqslant\Theta<\varphi_n)$ поэтому на основании полученного решения нельзя сделать вывод о наличии или отсутствии у системы субгармонических движений при воздействии на нее гармонической силы.

Но можно сделать вывод, что в просчитанных случаях при воздействии на рассматриваемую систему **гармонической силы невозможны субгармонические движения с периодическим законом,** удовлетворяющим условиям (1.2). По результатам расчета для указанных значений n, λ, δ и η были построены амплитудно-частотные кривые $\mu(\eta)$ и законы изменения относительного перемещения и скорости системы в зависимости от времени $\varkappa(\Theta)$ и $\dot{\varkappa}(\Theta)$, где Θ — текущее значение безразмерного времени на любом этапе движения системы. В работе [I] приведены амплитудно-частотные кривые для $n=1$; $\lambda=2$; 5; и $\delta=0,1\div1,3$, построенные в области, где корень τ_1 уравнения (1.5) удовлетворяет условиям (1.1). Во всех случаях, когда при $n=1$ значения параметров λ, δ и η удовлетворяют пункту (*а*) критерия (2.2), корень τ_1, как это указывалось выше, удовлетворяет условию (1.1), и законы изменения во времени перемещения и скорости системы мало отличаются от гармонических (см. рис. 3). В этой области наблюдается хорошее совпадение точных значений резонансной относительной амплитуды $\mu=\mu_{max}$ и относительной резонансной частоты $\eta=\eta_p$ с этими величинами, найденными различными приближенными методами [I].

В случаях, когда при $n=1$ значения параметров λ, δ и η удовлетворяют пункту (δ) критерия (2.2) (например, $\lambda\geqslant5$ и $1,1\leqslant\delta<\frac{4}{\pi}$) и корень τ_1 удовлетворяет условию (1.1) на резонансных $(\eta=\eta_p)$ и близких к ним режимах движения системы, отличие закона изменения скорости от гармонического закона возрастает (см. рис. 4). При этом наблюдается большое различие в величинах μ_{max} и η_p, определенных точным и приближенным методами [1].

На рис. 5 показаны амплитудно-частотные кривые для значений $n=1$; $\lambda=5$ и различных δ, построенные в интервале значений $o<\eta<\eta_2$. Сплошными линиями показаны участки кривых, где τ_1

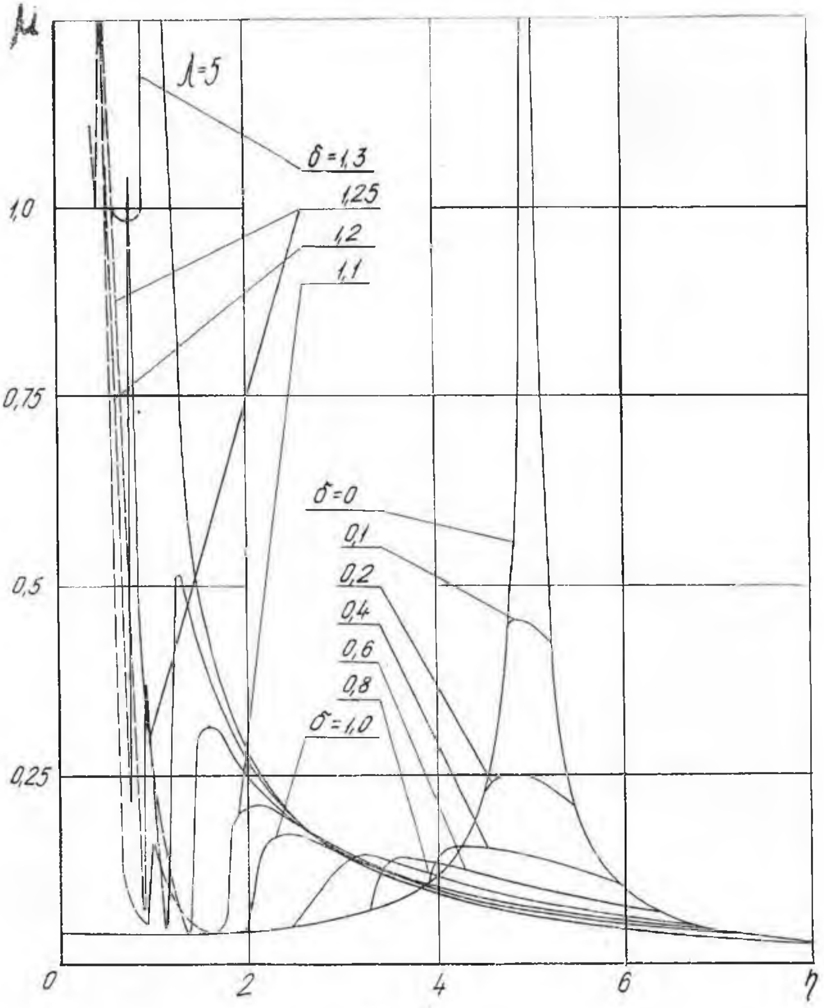


Рис. 5.

удовлетворяет условиям (1.7), и пунктирными, где τ_1 не удовлетворяет этим условиям.

На рис. 6 показаны амплитудно-частотные кривые для значений $n=1$; $\lambda=5$; $\delta=1{,}1$; 1,2; 1,25; 1,3 для корней τ_3 и τ_5, удовлетворяющих условиям (1.7). Как видно из рис. 5 и 6, для одних и тех же значений λ, δ и n максимальные значения относительных амплитуд $\mu=\mu_{max}$ движений системы, удовлетворяющих только условиям (1.7), в несколько раз больше μ_{max} резонансных движений системы, лежащих в интервале $1\leqslant\eta\leqslant\lambda$ и удовлетворяющих условиям (1.1). Причем, эти максимумы лежат в области относительных частот η, меньших парциальной резонансной частоты,

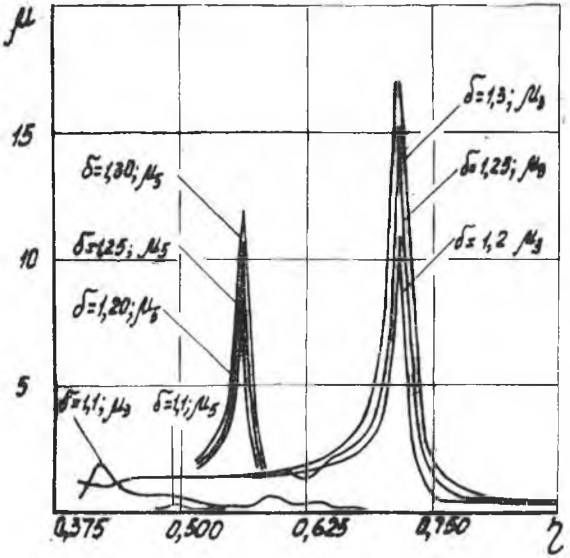


Рис. 6.

соответствующей наименьшей жесткости системы $\eta_p = 1$. Следовательно, эти движения могут представлять большую опасность для прочности системы при колебаниях на этих режимах либо при переходе через них. Поэтому необходимо решить вопрос об устойчивости этих движений.

Законы изменения перемещения и скорости системы на этих режимах, являющиеся сложными периодическими функциями от безразмерного времени Θ, показаны на рис. 7.

Расчеты на ЭВМ «Урал-2» проведены инженерами-программистами Векслиной Э. И., Савиной З. А. и Скрипкиной Ф. В.

3. Область ограниченных относительных амплитуд

Как следует из физической сущности решаемой задачи, представляют интерес только конечные и отличные от нуля значения параметров δ и η и конечные значения параметра λ, большие единицы. Полагая, что названные параметры удовлетворяют указанным условиям, определяем область в пространстве этих параметров, в которой величина относительной амплитуды μ ограничена.

Заметим, что при $\eta = 1$ и $\eta = \lambda$ значения некоторых коэффициентов A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ обращаются в неопределенности типа 0/0. Раскрыв эти неопределенности, получим:

для $\eta = 1$

$$A_1 = 1 - \cos\lambda\tau; \quad A_2 = 1 - \cos\tau; \quad A_3 = \sin\lambda\tau - \lambda\sin\tau;$$

$$B_1 = \lambda H_1(\cos\lambda\tau - \cos\tau); \quad B_2 = (1/2\lambda)(\pi - \tau)\sin\tau;$$

$$B_3 = H_1(\sin\tau - \lambda\sin\lambda\tau) + \left(\frac{1}{2}\right)[\sin\tau - (\pi - \tau)\cos\tau];$$

$$C_1 = H_1(\sin\lambda\tau - \lambda\sin\tau); \quad C_2 = -(1/2\lambda)(\sin\tau - \tau\cos\tau + \pi\cos\tau);$$

$$C_3 = H_1(\cos\lambda\tau - \cos\tau) + (1/2)(\tau - \pi)\sin\tau.$$

для $\eta = \lambda$

$$A_1 = 1 - \cos\lambda\tau; \quad A_2 = 1 + \cos\varphi_*; \quad A_3 = \sin\lambda\tau - \lambda\sin\varphi_*;$$

$$(\varphi_* = (^{n\pi}/_{\eta}) - \tau);$$

$$B_1 = (1/2)\tau\sin\lambda\tau; \quad B_2 = (H_1/\lambda)(\cos\lambda\tau + \cos\varphi_*);$$

$$B_3 = -(1/2\lambda)(\sin\lambda\tau + \lambda\tau\cos\lambda\tau) + H_1(\lambda\sin\lambda\tau - \sin\varphi_*);$$

$$C_1 = (1/2\lambda)(\lambda\tau\cos\lambda\tau - \cos\lambda\tau); \quad C_2 = (H_1/\lambda)(\lambda\sin\varphi_* - \sin\lambda\tau);$$

$$C_3 = -\frac{\pi}{2}\sin\lambda\tau.$$

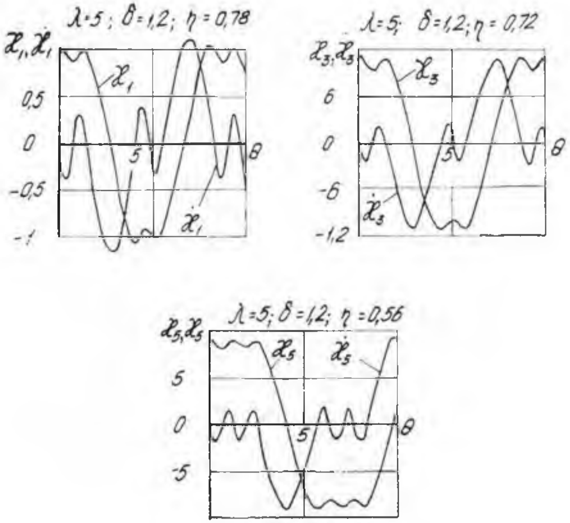


Рис. 7.

Амплитуда μ может обратиться в бесконечность, когда

$$D = 0; \quad D_3 \neq 0, \tag{3.1}$$

что имеет место для тех значений τ, которые являются корнями уравнения (1.5). Но при $D=0$ последнее уравнение может иметь вещественные корни лишь при

$$D_1 = D_2 = 0. \tag{3.2}$$

Причем одновременное выполнение условий (3.1) и (3.2) возможно лишь при одновременном выполнении двух равенств $\tau=0$; $\eta=1$. Но для этих значений величин τ и η первые два члена левой части уравнения (1.5) обращаются в неопределенности вида 0/0. Раскрыв эти неопределенности, устанавливаем, что при $\eta=1$ значение $\tau=0$ действительно будет корнем упомянутого уравнения лишь при значении параметра δ, определенном равенством.

$$\delta = 4/\pi. \tag{3.3}$$

При выполнении этого равенства величина $\tau=0$ для $\eta=1$ будет корнем уравнения (1.5) для любых значений параметра λ в интервале $1<\lambda<\infty$.

Таким образом, чтобы при любых значениях параметра η (в том числе и $\eta=1$) в интервале $0<\eta<\infty$ и параметра λ в интервале $1<\lambda<\infty$ значения относительной амплитуды не превосходили некоторой конечной величины, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\delta \neq \frac{4}{\pi}. \tag{3.4}$$

При этом допускается не только неравенство $\delta < \frac{4}{\pi}$, но и неравенство $\delta > \frac{4}{\pi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Волк, И. Д. Эскин. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы и с упруго-гистерезисной петлей в форме параллелограмма Инженерный журнал АН СССР, № 3, Москва, 1968.