

Р и с. 4. Зависимость коэффициента передачи амплитуды от удвоенной амплитуды возбуждающих колебаний при разной степени пропитки липковязким составом упругих элементов устройств В-3

собственных частотах колебаний виброизолирующего устройства В-3, соответствующие разной степени пропитки упругих элементов из МР липковязким полимерным составом. Здесь также видны отмеченные выше явления.

В ы в о д ы

1. Пропитка упругих элементов из МР липковязким полимерным составом несколько повышает их жесткость.
2. Пропитка упругих элементов из МР данным составом может значительно снизить резонансные амплитуды колебаний изолируемого от вибраций объекта.
3. Величина снижения резонансных амплитуд колебаний виброизолирующих устройств с металлорезиновыми упругими элементами зависит от степени пропитки этих элементов липковязким составом.
4. Проведенные исследования показывают перспективность применения составов, подобных данному, для повышения диссипативных свойств виброизолирующих устройств.

В.Н.Бузицкий, Г.В.Лауткин

ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК АМОРТИЗАТОРОВ ИЗ МАТЕРИАЛА МР

Сложившийся путь исследования амортизаторов и демпферов из материала МР основан на допущении о независимости упругих и неупругих свойств от величины скорости циклического нагружения. Это поз-

воляет исследовать динамические характеристики амортизаторов, пользуясь их статическими упруго-фрикционными характеристиками (УФХ).

Ввиду отсутствия теоретической модели деформирования амортизаторов их УФХ определяют как совокупность экспериментально получаемых процессов нагрузки (для скорости $\dot{x} > 0$) и разгрузки ($\dot{x} < 0$). Эти совокупности можно описать уравнением

$$\rho = \varphi [x(t) \operatorname{sign} \dot{x}, x_1, \dots, x_c, x_v, z_1, z_f], \quad (1)$$

где $x_1, \dots, x_c, \dots, x_v \equiv x$ при $\dot{x} = 0$ и $\dot{x} \neq 0$; $x(t)$ - закон деформирования во времени; ρ - сила, вызывающая деформацию x ; z_1, \dots, z_f - параметры, характеризующие амортизатор (геометрическая форма, плотность материала МР и т.д.).

Число параметров в уравнении (1) может быть сокращено, если воспользоваться методами теории подобия и результатами работы [1]. В этом случае (1) приводится к обобщенной форме и записывается в виде

$$\rho = \Phi_1(\varphi, \operatorname{sign} \dot{\varphi}, \varphi_1, \dots, \varphi_c, \dots, \varphi_v, \Pi_2), \quad (2)$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_c, \dots, \varphi_v \equiv \varphi$ при $\dot{\varphi} = 0$ и $\dot{\varphi} \neq 0$; $\rho = \frac{\rho}{T}$ - обобщенная сила; $\varphi = \frac{x}{a}$ - обобщенная деформация; Π_2 - безразмерные комплексы, составленные из параметров z амортизаторов; T, a - коэффициенты подобных преобразований, соответственно равные отрезкам, отсекаемым на осях ρ и x_j - й петель, удовлетворяющей условию $\frac{x_j}{a} = idem$.

Рассмотрим циклическое деформирование амортизаторов с различными амплитудами деформации φ_k относительно точки с координатами φ_m , φ_m (φ_m - натяг).

Производя в зависимости (2) замену переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_c, \dots, \varphi_v$ на $\varphi_k = \left| \frac{\varphi_c - \varphi_{c-1}}{2} \right|$ и $\varphi_m = \frac{\varphi_c + \varphi_{c-1}}{2}$, запишем все процессы нагрузки и разгрузки полей петель гистерезиса в виде полиномов i -й степени:

$$\rho = \begin{cases} \sum_{i=0}^q C_i(\varphi_k, \varphi_m, \Pi_2) \varphi^i & \dot{\varphi} > 0 \\ \sum_{i=0}^q D_i(\varphi_k, \varphi_m, \Pi_2) \varphi^i & \dot{\varphi} < 0. \end{cases} \quad (3)$$

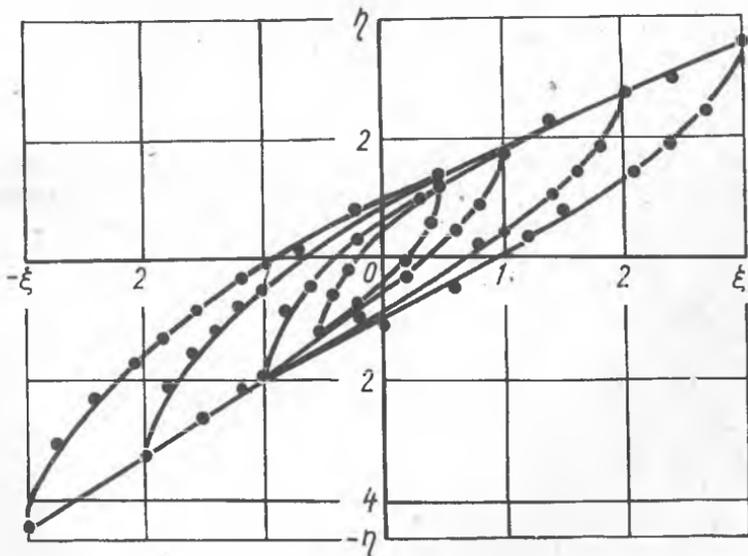
где C_i, D_i - коэффициенты полиномов; $i = 0, 1, 2, \dots, q$. Используя разложения по полиномам Чебышева, запишем выражение (3) в виде

$$\eta = \sum_{|\lambda|=0}^s \rho_{\lambda_1, \lambda_2} \zeta^{\lambda_1} \bar{\zeta}^{\lambda_2}, \quad (4)$$

где $\rho_{\lambda_1, \lambda_2} = \frac{\rho'_{\lambda_1, \lambda_2}}{\zeta_{\kappa}^{\lambda_1} \bar{\zeta}_{\kappa}^{\lambda_2} \nu^{\lambda_2}}$; ν - частота циклического нагружения;

$\rho'_{\lambda_1, \lambda_2}$ - коэффициенты полиномов Чебышева; $\rho'_{\lambda_1, \lambda_2} = \sum_{q=0}^q \sum_{r=0}^q S_{q,r}^{(\lambda_1, \lambda_2)} \zeta_m^q \zeta_{\kappa}^r$;
 $S_{q,r}^{(\lambda_1, \lambda_2)} = \varphi(\pi_2)$.

Таким образом, математическая модель деформирования амортизаторов в форме (3) или (4) будет определена, если найдены функциональные связи коэффициентов полиномов C_i , D_i или $\rho_{\lambda_1, \lambda_2}$ с параметрами $\zeta_{\kappa}, \zeta_m, \pi_2$. В качестве примера для амортизаторов семейства ДК были определены вышеуказанные функциональные связи коэффициентов $\rho_{\lambda_1, \lambda_2}$ и построено поле петель для случая $s = 3$; $q = 6$; $0,5 \leq \zeta_{\kappa} \leq 3$; $\zeta_m = 0$. Как видно из рис. I, поле петель гистерезиса, полученное с помощью математической модели (4), достаточно хорошо отображает реальное поле.



Р и с . I

Следовательно, при решении динамических задач об установившихся колебаниях, математическая модель деформирования амортизаторов может быть представлена в форме (3) или (4).

С учетом формулы (4) обобщенное дифференциальное уравнение движения амортизированной системы с одной степенью свободы массой m при гармоническом возбуждении с амплитудой B имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \sum_{|\lambda|=0}^s p_{\lambda_1 \lambda_2} \varphi^{\lambda_1} \dot{\varphi}^{\lambda_2} = \bar{B} \sin \nu \theta + \bar{Q}, \quad (5)$$

где $\theta = \omega_0 t$; $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{am}}$; $\bar{Q} = \frac{Q}{T}$; $\bar{B} = \frac{B}{T}$; ω - частота вынужденных колебаний; Q - постоянно приложенная сила.

В дальнейших исследованиях, не нарушая общности, полагаем $s = 3$. Решение уравнения (5) можно получить известными аналитическими приближенными методами, например методом гармонического баланса, согласно которому периодическое решение находится в виде

$$\varphi = \varphi_m + a_\kappa \sin \nu \theta + b_\kappa \cos \nu \theta \quad (6)$$

или

$$\varphi = \varphi_m + \varphi_\kappa \sin (\nu \theta + \varphi). \quad (7)$$

Подставляя (6) в (5) и приравнявая к нулю отдельно свободные члены, коэффициенты при $\sin \nu \theta$ и $\cos \nu \theta$, получаем систему трех уравнений. Исключая из двух последних a_κ и b_κ , имеем в конечном итоге систему двух уравнений, которую можно разрешить относительно φ_κ :

$$\begin{cases} \varphi_\kappa^2 (M^2 + \nu^2 N^2) - B = 0; \\ P_{30} \varphi_m^3 + P_{20} \varphi_m^2 + (P_{10} + \frac{3}{2} P_{30} \varphi_\kappa^2) \varphi_m + \frac{1}{2} P_{20} \varphi_\kappa^2 + P_{00} - \bar{Q} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

причем $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b_\kappa}{a_\kappa} = \frac{\nu N}{M}$.

Здесь

$$M = \nu^2 - P_{10} - 2P_{20} \varphi_m - 3P_{30} \varphi_m^2 - \frac{3}{4} P_{30} \varphi_\kappa^2;$$

$$N = P_{01} + P_{11} \varphi_m + P_{21} \varphi_m^2 + \frac{1}{4} P_{21} \varphi_\kappa^2 + \frac{3}{4} P_{03} \varphi_\kappa^2 \nu^2.$$

Если УФХ заданы в форме (3), то уравнения для определения величин ξ_k , ξ_m и φ записываются в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sum_{i=0}^q C_i \xi^i d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} \sum_{i=0}^q D_i \xi^i d\psi \right] = \bar{Q};$$

$$-\nu^2 \xi_k \cos \varphi + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sum_{i=0}^q C_i \xi^i \cos \psi d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} \sum_{i=0}^q D_i \xi^i \cos \psi d\psi \right] = 0;$$

$$\nu \xi_k \sin \varphi + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sum_{i=0}^q C_i \xi^i \sin \psi d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} \sum_{i=0}^q D_i \xi^i \sin \psi d\psi \right] = 0,$$

где $\varphi = \nu \theta$, а ξ соответствует зависимости (7).

В качестве примера на рис. 2 приведены динамические характеристики амортизаторов типа ДК, полученные из решения (8). Там же нанесены экспериментальные точки.

Рассмотрим устойчивость установившихся периодических колебаний, основываясь на теории Флоке [2]. Малое отклонение от периодического решения можно принять в виде

$$x = \delta a_k \sin \nu \theta + \delta b_k \cos \nu \theta \quad (9)$$

или

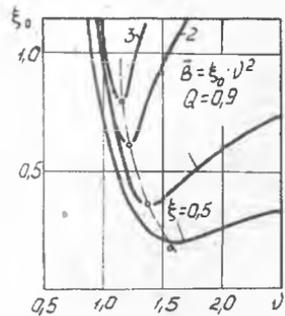
$$x = \delta \xi_k \sin(\nu \theta + \alpha),$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta b_k}{\delta a_k}.$$

Здесь δa_k , δb_k , $\delta \xi_k$ - вариации соответствующих переменных. Запишем уравнение (5) в вариациях

$$\ddot{x} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right) x + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_k} \right) \delta \xi_k = 0. \quad (10)$$



Р и с. 2

Коэффициенты при \ddot{x} , \dot{x} и φ_{κ} являются периодическими функциями времени θ и, если $\varphi = \alpha = idem$, то выражение (10), учитывая (9), можно привести к виду

$$\ddot{x} + G(\theta^*)x = 0, \quad (II)$$

где $\theta^* = \theta + \varphi$.

Для выполнения условия $\varphi = idem$ необходимо, чтобы $p'_{11} = p'_{21} = 0$, $\frac{p'_{022}}{\lambda_2} = idem$, ($3 > |\lambda_2| > 0$), $B = idem$. Уравнение (II) после подстановки в него $G(\theta^*)$ приобретает вид уравнения Хилла:

$$\ddot{x} + \left(R_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{\nu} \cos 2\nu\theta^* \right) x = 0. \quad (I2)$$

В этом случае для n -й области неустойчивости можно записать неравенство $|R_0 - n^2| > |R_n|$.

На границе между областями устойчивости и неустойчивости граничные кривые n -й области неустойчивости связаны зависимостью $R_0 = n^2 \pm R_n$.

Исследуем устойчивость периодического решения (5) в случае симметричных УФХ $S = 3$.

Согласно (10) имеем

$$\ddot{x} + \left[p_{10} + 3p_{30}\varphi_{\kappa}^2 + \varphi_{\kappa} \left(\frac{dp_{10}}{d\varphi_{\kappa}} \right) + \frac{dp_{30}}{d\varphi_{\kappa}} \varphi_{\kappa} \right] x = 0.$$

Подставляя в это уравнение периодическое решение (7), получаем

$$\ddot{x} + (R_0 + 2R_1 \cos 2\nu\theta^*)x = 0,$$

где

$$R_0 = p_{10} + \frac{dp_{10}}{d\varphi_{\kappa}} \varphi_{\kappa} + \frac{\varphi_{\kappa}^2}{2} \left(3p_{30} + \frac{dp_{30}}{d\varphi_{\kappa}} \varphi_{\kappa} \right),$$

$$R_1 = -\frac{\varphi_{\kappa}^2}{4} \left(3p_{30} + \frac{dp_{30}}{d\varphi_{\kappa}} \varphi_{\kappa} \right).$$

Граница устойчивости определяется выражением $R_0 = \nu^2 \pm R_1$. Легко видеть, что одно из этих условий является условием вертикальности касательной к амплитудно-частотной характеристике, т.е. $\frac{d\nu^2}{d\varphi_{\kappa}^2} = 0$; при этом устойчивым колебаниям соответствует неравенство $\frac{d\nu^2}{d\varphi_{\kappa}^2} > 0$.

Рассмотрим ударное нагружение амортизаторов. Дифференциальное уравнение движения запишем в виде

$$\ddot{\xi} + \Phi_1(\xi, \text{sign } \dot{\xi}, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_c, \dots, \dot{\xi}_v, \Pi_2) = F(\theta), \quad (13)$$

где $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_c, \dots, \dot{\xi}_v = \dot{\xi}$ при $\xi = 0$ и $\dot{\xi} \neq 0$; $F(\theta) = \begin{cases} z(\theta) \\ 0 \end{cases}$ при $\theta_y > \theta \geq 0$ - ударное воздействие; θ_y - относительная длительность удара; $(\xi)_{\theta=0} = 0$; $(\dot{\xi})_{\theta=0} = 0$ - начальные условия.

Для любого момента времени $\theta_c = \theta_{c-1} + \Delta\theta_c$ ($\Delta\theta_c$ - шаг времени, в общем случае переменный) можно записать

$$\begin{cases} \Delta\varphi_c = \frac{\varphi_{c-1}}{\varphi_c} \sin \varphi_c \Delta\theta_c + \Gamma_c (1 - \cos \varphi_c \Delta\theta_c); \\ \varphi_c = \dot{\varphi}_{c-1} \cos \varphi_c \Delta\theta_c + \varphi_c \Gamma_c \sin \varphi_c \Delta\theta_c, \end{cases} \quad (14)$$

где
$$\Gamma_c = \frac{F(\theta_{c-1}) - \Phi_1(\varphi_{c-1}, \text{sign } \dot{\varphi}_{c-1}, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_2, \Pi_2)}{\varphi_c^2};$$

$$\varphi_c^2 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right)_{\xi_{c-1}}; \quad \theta_{c-1} = \sum_{a=1}^{c-1} \Delta\theta_a; \quad \varphi_{c-1} = \sum_{a=1}^{c-1} \Delta\varphi_a.$$

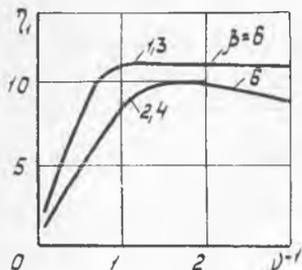
В практике широкое распространение получили случаи ударного воздействия в виде прямоугольного импульса

$$F_1(\theta) = \begin{cases} \beta & \text{для } \theta_y > \theta \geq 0 \\ 0 & \text{для } \infty > \theta > \theta_y \end{cases} \quad (15)$$

и полуволны синусоиды

$$F_2(\theta) = \begin{cases} \beta \sin \nu \theta & \theta_y > \theta \geq 0 \\ 0 & \infty > \theta > \theta_y. \end{cases} \quad (16)$$

В случае (15), а также для широкого диапазона длительностей удара $\theta_y = \frac{\pi}{\nu}$ случая (16) наибольшие значения деформации ξ , и реакции $\dot{\xi}$, амортизаторов всегда достигаются в момент времени θ_1 , когда первый раз выполнится условие $\dot{\xi}(\theta_1) = 0$.



Р и с. 3

Это позволяет использовать при решении уравнения (13) простейшую модель деформирования амортизаторов в форме (3), при этом для (15) $\theta_y \in (0, \infty)$; для (16) $\theta_y \in (0, \theta_1^*)$, где $\theta_1^* \approx 3\theta_1$, $\theta_1 = \frac{\pi}{\nu}$, а $\nu_0 = \frac{1}{5.9} \sqrt{\sum_{i=1}^3 C_i \gamma_i^2 d_i^2}$ - собственная частота линеаризованной системы.

На рис. 3 (кривые 1 для (15) и 2 для (16) представлены противоударные характеристики амортизаторов семейства ДК в консольной схеме нагружения.

Необходимо отметить, что для указанной схемы нагружения можно воспользоваться простейшей аппроксимацией УФХ в виде $\varphi = \sin \varphi - \gamma$. В этом случае для ударного нагружения амортизаторов вида (15) или (16) удастся получить аналитическое решение задачи в замкнутом виде:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\beta(\beta-1)} \sin^2 \frac{\pi}{2\nu} + 0.25}{2\beta-1} & (\pi > \theta_y > 0) \\ \infty & (\infty > \theta_y > \pi) \end{cases}$$

и

$$\gamma_1 = \begin{cases} \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \sqrt{1 + \frac{2\beta^2}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{2\beta}{\nu^2} \left[\sqrt{\beta^2-1} \cos\left(\frac{\pi}{\nu} - \gamma_0\right) - \nu \sin\left(\frac{\pi}{\nu} - \gamma_0\right) \right]}, & \pi > \theta_y > 0 \\ \frac{\nu\sqrt{\beta^2-1}}{1-\nu^2} \sin(\theta_1 - \gamma_0) - \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \cos(\theta_1 - \gamma_0) + \frac{\beta}{1-\nu^2} \sin \nu \theta_1, & 3\pi > \theta_y > \pi, \end{cases}$$

где θ_1 - является корнем трансцендентного уравнения

$$-\sqrt{\beta^2-1} \cos(\theta_1 - \gamma_0) - \nu \sin(\theta_1 - \gamma_0) + \beta \cos \nu \theta_1 = 0.$$

Для $\beta > 4$ можно приближенно считать

$$\theta_1 \approx \frac{3\pi}{2} + \gamma_0 + \gamma_1,$$

где

$$\gamma_0 = \frac{1}{\nu} \arcsin \frac{1}{\beta}; \quad \gamma_1 = \arctg \frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\nu}.$$

На рис. 3 изображены полученные зависимости: кривая 3 для (15) и 4 для (16).

Л и т е р а т у р а

1. Д а з у т к и н Г.В., Т р у б и н В.Н., Т р о й н и к о в А.А.
О подобии диссипативных систем по упруго-фрикционным характеристикам. - В сб.: Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. Труды КуАИ, 1975, вып. I (68).
2. Х а я с и Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., ИЛ, 1968.

В.Н.Бузицкий, А.А.Тройников

РАСЧЕТ ВТУЛОЧНЫХ АМОРТИЗАТОРОВ ИЗ МАТЕРИАЛА МР, РАБОТАЮЩЕГО НА СЖАТИЕ

Втулочный амортизатор обычно включает в себя два упругих элемента, установленных с предварительным натягом. Величина натяга назначается из условия нерасстыковки упругих элементов на резонансе. Характеристики амортизатора определяются петлей гистерезиса, которая получается суммированием петель отдельных элементов. Если петли гистерезиса отдельных элементов одинаковы, то суммарная петля амортизатора будет симметричной.

Отметим некоторые особенности петель гистерезиса:

- а) при изменении амплитуды деформации элемента изменяется форма, наклон и площадь петли;
- б) разгрузочная ветвь петли имеет при вершине вертикальную касательную;
- в) из петли нельзя выделить упругую и неупругую составляющие.

Отсутствие достоверной расчетной модели, которая отражала бы перечисленные особенности петель гистерезиса и обеспечивала необходимую точность теоретического построения петли, приводит к необходимости строить статические циклы экспериментальным путем. По этим циклам также экспериментально определяются статические характеристики, которые в дальнейшем (при определенных допущениях) используются для нахождения динамических характеристик амортизатора. Такой подход не решает задачу создания амортизатора с наперед заданными динамическими характеристиками, а лишь позволяет установить характеристики реального амортизатора.