

Библиографический список

1. Пашкович П.Ф. Теория упругости. - М.:Оборонгиз, 1939. - 169 с.
2. Дедензон Л.С. Вариационные методы решения задач теории упругости. - М.:Гостехиздат, 1943. - 172 с.
3. Виргор И.А. Вариационные методы в строительной механике турбомашин. - М.:Оборонгиз, 1959. - 234 с.
4. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1975. - 320 с.

УДК 639.3:534.1

О.Ф.Борискин, О.В.Репешкий

К РАСЧЕТУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОЧНЫХ ВЕНЦОВ ГТД НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

В настоящей работе описан алгоритм, объединяющий методы суперэлементов и циклической симметрии, приведены результаты расчета колебаний лопаточного венца как единой упругой системы.

Большое внимание к исследованию колебаний механических систем с поворотной симметрией /1,2/ связано, прежде всего, с двумя факторами. Во-первых, конструкции подобного типа находят широкое распространение как в общем машиностроении, так и в авиационном газотурбостроении. Наиболее характерным примером таких конструкций являются осевые и радиальные рабочие колеса. Во-вторых, благодаря специфическим особенностям конструкций такого типа анализ колебаний всей системы может быть проведен при рассмотрении ее отдельной части. Таким образом удается значительно сократить трудоемкость расчетов и выполнить их на ЭЦМ среднего класса.

Известные до настоящего времени конечноэлементные методики исследования колебаний систем с поворотной симметрией /3,4,5/ приводят к решению задачи о собственных значениях для симметричных, полностью заполненных матриц. Это накладывает существенные ограничения на размерность решаемой задачи и не позволяет применить данные алгоритмы при расчете реальных деталей турбомашин. Для устранения этого недостатка предлагается комплексная методика, основанная на совместном использовании процедуры статической конденсации для динамических

задач и алгоритма расчета колебаний систем с циклической поворотной симметрией. Кроме того, целесообразно вместо вычисления матрицы динамической жесткости для каждого пробного значения частоты получить преобразованные матрицы жесткости и масс для таких конструкций, что позволит использовать более общие алгоритмы решения задачи о собственных значениях.

Для механических систем с поворотной симметрией геометрические, упругие и массовые характеристики повторяются в окружном направлении с периодом $2\pi/N$, где N определяет порядок симметрии. Таким образом, рассматриваемую систему можно представить в виде совокупности типичных участков или секций. При этом каждая секция может быть получена путем поворота одного базового участка на угол $2\pi j/N$ вокруг оси симметрии, где $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. В общем случае система с поворотной симметрией может быть плоской или пространственной и находиться как в общем объемном напряженном состоянии, так и в любом частном его виде.

Для снижения трудоемкости анализа колебаний систем с поворотной симметрией предварительно необходимо выполнить статическую конденсацию для динамических задач [6]. Если $[K]$ и $[M]$ – исходные матрицы жесткости и масс сегмента, то после выделения внешних и внутренних степеней свободы может быть получена переходная матрица

$$[T] = \begin{bmatrix} T_C \\ T_L \end{bmatrix},$$

где $[T_C] = [I]$ – единичная матрица,

$$[T_L] = -[K_{LL}]^{-1} [K_{LC}].$$

Индекс C относится к внешним степеням свободы, а L – к внутренним. Исключению внутренних степеней свободы соответствует следующее преобразование исходных матриц системы:

$$[K] = [T]^T [\bar{K}] [T];$$

$$[M] = [T]^T [\bar{M}] [T].$$

В каждой из частей необходимо выделить левую и правую граничные поверхности, по которым происходит соприкосновение с левой и правой секциями системы. Для частного случая стержневой системы эти поверхности вырождаются в совокупность граничных точек, а для пластинчатых и оболочечных конструкций – в граничные линии. Остальной объем секции принято называть срединной частью. В самом общем случае граничные поверхности могут быть искривленными. Соответственно для конечноразмерной расчетной модели необходимо выделить левые, средние и правые узлы и соответствующие узловы перемещения.

Основная идея метода расчета систем с поворотной симметрией состоит в том, что векторы узловых перемещений и реакций в характерных сечениях подобны. На основании сконденсированных матриц жесткости и масс уравнение свободных колебаний секции может быть записано в виде

$$\left(\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ 0 \\ Q_2 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где $\{\delta_1\}, \{\delta_2\}, \{\delta_3\}$ - векторы узловых перемещений в левых, средних и правых узлах секции; $\{Q_1\}$ и $\{Q_3\}$ - векторы узловых реакций на левой и правой границах; $[K_{ij}], [M_{ij}]$ - соответствующие блоки матриц жесткости и масс секции.

На основании свойств цикличности системы /3,4,5/ можно записать

$$\{\delta_3\} = e^{\alpha_n} \{\delta_1\}; \quad \{Q_3\} = -e^{\alpha_n} \{Q_1\}, \quad (2)$$

где $\alpha_n = i \frac{\pi}{N} m$; $m = 0, 1, \dots, N-1$; $i = \sqrt{-1}$.

После подстановки (2) в (1) и исключения перемещений и усилий на правой границе уравнение свободных колебаний системы может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} (K_{11} + K_{33} + K_{31} e^{-\alpha_n} + K_{13} e^{\alpha_n})(K_{12} + K_{32} e^{-\alpha_n}) \\ (K_{21} + K_{23} e^{\alpha_n}) & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} (M_{11} + M_{33} + M_{31} e^{-\alpha_n} + M_{13} e^{\alpha_n})(M_{12} - M_{32} e^{-\alpha_n}) \\ M_{21} - M_{23} e^{\alpha_n} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = 0$$

или в привычной форме

$$\left([\tilde{K}] - \omega^2 [\tilde{M}] \right) \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (3)$$

Здесь матрицы жесткости и масс, вектор перемещений - комплексные величины:

$$[\tilde{K}] = [\tilde{K}_{Re}] + i [K_{Im}];$$

$$[\tilde{M}] = [\tilde{M}_{Re}] + i [M_{Im}];$$

$$\{\delta\} = \{\delta_{Re}\} + i \{\delta_{Im}\}.$$

С учетом этого уравнение (3) может быть записано так:

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{K}_{Re} - \tilde{K}_{Im} \\ \tilde{K}_{Im} - \tilde{K}_{Re} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{M}_{Re} - \tilde{M}_{Im} \\ \tilde{M}_{Im} - \tilde{M}_{Re} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta_{Re} \\ \delta_{Im} \end{Bmatrix} = 0. \quad (4)$$

Зависимость (4) представляет собой задачу о собственных значениях с действительными симметричными матрицами, которая может быть решена с использованием стандартных подпрограмм. Порядок этих матриц не зависит от числа секций, а определяется количеством степеней свободы одной секции.

Каждому значению α_n соответствует столько частот, сколько степеней свободы имеет сегмент за исключением правых граничных узлов. При этом частоты для комплексно-сопряженных α_n и α_{N-n} совпадают. Соответствующие собственные векторы также являются сопряженными. Для получения спектра частот исследуемой конструкции параметр в уравнениях свободных колебаний (3) и (4) должен принимать значения $0, 1, \dots, N/2$ для четного количества секций и $0, 1, \dots, (N-1)/2$ для нечетного.

При использовании плоских элементов для исследования оболочечных конструкций большое значение имеет уменьшение погрешностей конечноэлементной аппроксимации. Это может быть достигнуто двумя способами:

прямым сгущением конечноэлементной сетки;

применением специальных элементов, повышающих порядок аппроксимации.

К числу таких элементов относится четырехугольный конечный элемент, полученный объединением четырех треугольников с общим центральным узлом. В процессе расчета степени свободы, соответствующие центральному узлу, исключаются методами экономизации или суперэлементов и в вычислениях не участвуют. В итоге имеем произвольный четырехугольный конечный элемент переменной толщины с 24 степенями свободы, объединяющий плосконапряженную и изгибную части.

Для тестирования разработанной методики рассмотрены свободные колебания рабочих колес осевых турбомашин. В качестве объекта расчета принято модельное рабочее колесо с 24 лопатками. Размеры рас-

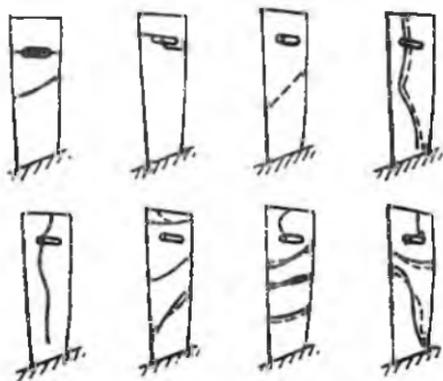
считываемой конструкции: внутренний и внешний радиусы диска 0,0135 и 0,06 м, толщина диска и лопатки 0,0002 м, длина лопатки 0,036 м, ширина – 0,012 м. Модуль упругости материала $2,1 \cdot 10^{11}$ Па; плотность $7,85 \cdot 10^3$ кг/м³; коэффициент Пуассона 0,3. Конечноеэлементная модель сектора содержит 78 степеней свободы. Эквивалентное число степеней свободы для всей рассматриваемой конструкции равно 1368. Результаты расчета частот собственных колебаний приведены в табл. 1 в сопоставлении с результатами экспериментального исследования, выполненного голографическими методами. В достаточно широкой области спектра частот собственных колебаний наблюдается удовлетворительное качественное согласование численных и экспериментальных результатов.

По разработанной методике проведено исследование колебаний лопаточного венца ГТД на жестком диске, состоящего из 37 лопаток с антивибрационными полками. Основные характеристики лопатки: угол закрутки 40° , хорда в корневом сечении 0,051 м, в периферийном – 0,0405 м, модуль Юнга $1,11 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона 0,3, плотность $4,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

Для данной лопатки был определен спектр частот при консольном и двухопорном закреплении на конечноеэлементной модели, содержащей 372 степени свободы. Результаты численных исследований лопатки при двухопорном закреплении приведены в табл. 2. Формы колебаний (рис. 1), построенные по МКЭ, практически совпадают с данными эксперимента.

Для исследования колебаний лопаточного венца разработана конечноеэлементная модель сектора, представляющая собой единичную лопатку и участок бандажа (рис. 2). Система координат и схема стыковки лопаток между собой изображены на рис. 3. В узлах стыковки полков исследованы различные кинематические граничные условия: шарнир со скольжением, жесткая заделка. Корневое сечение лопатки жестко заделано.

Конечноеэлементная модель сектора венца содержит 168 степеней свободы



Р и с. 1. Расчетные и экспериментальные формы колебаний лопатки при двухопорном закреплении

Т а б л и ц а I

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений частот собственных колебаний
модельного облапаченного диска, Гц

n	m = 0		m = 1		m = 2		m = 3	
	АСРК	Эксперимент	АСРК	Эксперимент	АСРК	Эксперимент	АСРК	Эксперимент
0	235	265	1448	1388	4339	-	6928	-
1	228	210	1458	1362	4483	4281	6931	8850
2	281	340	1694	1723	4998	4950	6943	9105
3	444	501	2063	2109	5979	5820	6988	9938
4	617	681	2560	2714	6790	6812	7460	11900
5	761	803	3145	3452	6879	7021	8675	12860
6	843	922	3764	4102	6895	-	9662	13100
7	905	938	4346	4738	6899	-	10750	14200
8	948	961	4834	5112	6896	-	12170	-
9	977	1008	5206	5613	6887	-	13800	-
10	996	1027	5463	5983	6878	-	15670	-
11	1006	1030	5613	6212	6870	-	17330	16618
12	1010	1032	5662	6221	6867	-	18880	17260

Т а б л и ц а 2

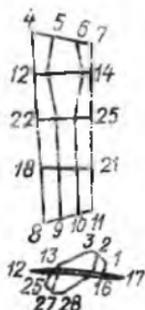
Частоты собственных колебаний лопатки при двухопорном
закреплении, Гц

	Формы колебаний							
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
МКД	499	806	1236	1444	1578	2403	2785	3228
Экспери- мент	-	800	1293	1467	-	2465	2662	3248
Ошибка, %	-	0,7	-4,4	-1,5	-	-2,5	4,6	-0,6

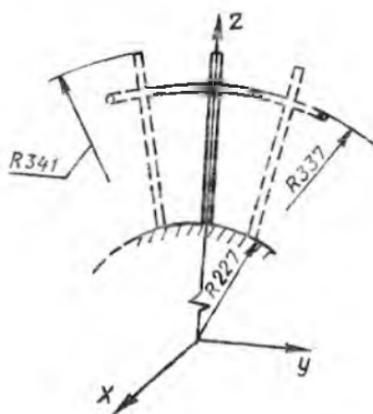
Т а б л и ц а 3

Частоты собственных колебаний лопаточного венца, Гц

n	m							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	138	413	766	1141	1279	1556	1753	2526
1	342	566	806	1151	1337	1556	1754	2527
2	362	691	957	1171	1548	1626	1767	2532
4	377	731	1046	1203	1555	1756	2372	2610
6	406	790	1081	1269	1594	1776	2470	2766
18	452	898	1126	1398	1737	2427	2791	3534



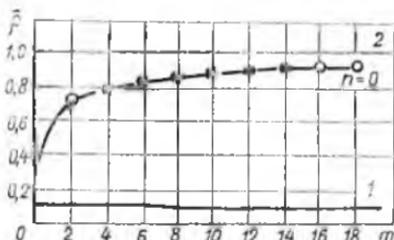
Р и с. 2. Конечно-элементная модель сектора венца



Р и с. 3. Расчетная схема для анализа колебаний лопаточного венца

или для всего венца - 6216 неизвестных. После конденсации сектор обладает 48 степенями свободы. Данные расчета лопаточного венца при шарнирном креплении полки приведены в табл. 3.

На рис.4 для $\mu = 0$ показан график изменения частоты $\bar{\gamma}^n$, равной отношению частоты венца к соответствующей частоте единичной лопатки при закрепленной полке, от числа волн деформаций системы.



Р и с. 4. Частотная диаграмма венца для $\mu = 0$

Получено, что собственные частоты колебаний лопаточного венца лежат в интервале, нижней границей которого является частота собственных колебаний консольной лопатки (линия 1), а верхней - частота, соответствующая двухспорному закреплению лопатки с полкой (линия 2), что хорошо со-

гласуется с известными техническими решениями. Проведенные численные исследования подтвердили достоверность, сходимость и устойчивость предложенной методики расчета частот собственных колебаний сложных механических систем с поворотной симметрией.

Библиографический список

1. Иванов В.П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией. - В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. М., 1971, вып.6, с.113-131.

2. Бидерман В.Л. Прикладная теория колебаний.-М.:Высшая школа, 1972.- 416 с.
3. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Колебания сложных механических систем.-Харьков:Вища школа, 1978. - 136 с.
4. Лукин Б.С. Об исследовании колебаний циклически симметричных конструкций методом конечных элементов.- В кн.: Динамика и прочность машин. Харьков, 1980, вып. 31, с.12-31.
5. Tomas D.L. *Dynamic of rotationally periodic structures. Int. J. Num. Meth. Engrn.*, 1979, v.14, N1, p.81-102.
6. Борискин О.Ф. Автоматизированные системы расчета колебаний методом конечных элементов.- Иркутск: Изд-во Иркутского гос.ун-та, 1984. - 188 с.

УДК 532.542

А.Г.Гимадиев

РАСЧЕТ АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДА
 ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ
 В МАЛОГАБАРИТНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Одним из важных параметров, по которым производится доводка и оценка эффективности энергетических установок, например двигателя, является динамическое давление. Отсутствие малогабаритных и работоспособных в условиях высоких температур серийных датчиков давления вынуждает исследователей применять акустические зонды. Успешное применение акустических зондов для измерения пульсаций давления в малогабаритных установках возможно при выполнении двух условий. Во-первых, установка зонда не должна вносить заметного искажения в динамический процесс в объекте испытаний, во-вторых, измерение пульсаций давления должно проводиться с минимальной динамической погрешностью в широком диапазоне частот.

Разработанные методы выбора параметров акустических зондов /1,2/ предполагают неограниченность объема объекта испытаний по сравнению с объемом внутренней полости зондов, т.е. не учитывают возможное искажение динамического процесса в объекте из-за установки зонда. В данной работе предлагается метод выбора параметров акустического зонда с корректирующим элементом, при которых одновременно удовлетворятся оба указанных выше условия.