КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXVI, 1969 г.
Вибрационная прочность и надежность двигателей
и систем летательных аппаратов

В. П. ИВАНОВ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЛОПАТОЧНОГО ВЕНЦА НА ОСНОВЕ ОБЩИХ ВИБРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ УПРУГИХ ЦИКЛИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

В настоящей статье излагается решение задачи о свободных колебаниях лопаточного венца, построенное на основе общих вибрационных свойств упругих циклически-симметричных тел.

Динамические характеристики циклически-симметричного тела полностью определяются динамическими характеристиками его периода структуры. На фиг. 1а схематично представлен обобщенный лопаточный венец, на фиг. 1б показан его период структуры, который может быть выделен из всей системы различным образом. Конкретно выделение его следует производить сообразуясь с удобствами расчета.

Динамические характеристики любого элемента упругой стержневой системы могут быть полностью охарактеризованы матрицей динамических жесткостей, например, см. [1]. В рассматриваемом случае характеризующим элементом системы является ее период структуры, матрицу динамических жесткостей которого запишем в виде:

$$K = \left\| \begin{array}{c|c} K_{aa} & K_{ab} \\ \hline K_{ba} & K_{bb} \end{array} \right\|, \tag{1}$$

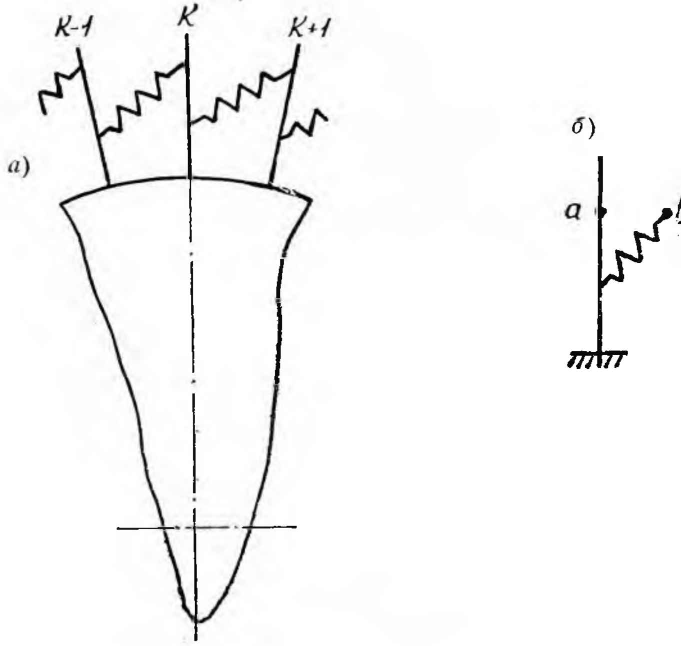
где K_{aa} — симметричная матрица динамических жесткостей в точке a при жестком закреплении точки b.

K_{bb} — симметричная матрица динамических жесткостей в точке b при жестком закреплении точки a.

K_{ab} — матрица амплитуд динамических реакций в закрепленной точке a при последовательном загружении единичными перемещениями каждого из компонентов точки b и фиксированных других.

$K_{ва} = K'_{ав}$ — матрица, полученная из матрицы $K_{ав}$ транспонированием.

Если между периодами структуры имеется один пояс связи, то в общем случае, когда в точке контакта возможны три линейных и три угловых перемещения, квадратная матрица K имеет 12-й порядок, а квадратные матрицы $K_{аа}$, $K_{вв}$, $K_{ав}$ и $K_{ва}$ — 6. Увеличение числа связей до n увеличивает порядок матрицы K до $12\,n$.



Фиг 1. Лопаточный венец и его период структуры.

При заданных компонентах перемещений в точках a и b усилия, которыми они вызваны, могут быть определены из

$$\begin{aligned} -Q_{а} &= K_{аа}q_{а} + K_{ав}q_{в} \\ Q_{в} &= K_{ва}q_{а} + K_{вв}q_{в}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $Q_{а}$ — матрица-столбец усилий в точке a,

$Q_{в}$ — матрица-столбец усилий в точке b,

$q_{а}$ — матрица-столбец перемещений в точке a,

$q_{в}$ — матрица-столбец перемещений в точке b.

Число периодов структуры, из которого состоит система, является числом, характеризующим порядок циклической симметрии. Перенумеровав периоды структуры, образующие систему, целыми числами $\kappa = 0, 1, 2, \ldots (S-1)$, где S — порядок симметрии, видим, что

$$q_{\text{ак}} = q_{\text{в}(\text{к}-1)}\cdot \qquad (3)$$
$$q_{\text{вк}} = q_{\text{а}(\text{к}+1)}\cdot$$

Если в точке связи между соседними периодами не приложено дополнительных внешних усилий, то

$$Q_{\text{в}(\text{к}-1)} - Q_{\text{ак}} = 0$$

или, учитывая (2) и (3) и опуская индекс a при q, получим

$$K_{\text{ва}}q_{\text{к}-1} + (K_{\text{вв}} + K_{\text{аа}})q_{\text{к}} + K_{\text{ав}}q_{\text{к}+1} = 0. \qquad (4)$$

На основе общих свойств собственных форм циклически-симметричных систем [2], [3] перемещения точек связи трех соседних периодов могут быть выражены в комплексной форме

$$q_{\text{к}-1} = q_0 e^{ik\alpha}e^{-i\alpha},$$
$$q_{\text{к}} = q_0 e^{ik\alpha}, \qquad (5)$$
$$q_{\text{к}+1} = q_0 e^{ik\alpha}e^{i\alpha},$$

где $\alpha = \frac{2\pi}{S}\lambda$,

λ — число волн деформации $\left(\lambda = 0, 1, 2, \ldots \frac{S}{2}\right.$ при четном S; $\lambda = 0, 1, 2 \ldots \frac{S-1}{2}$ при нечетном $\left.S\right)$,

$q_0 = q^* + iq^{**}$ — матрица, составленная из комплексных компонент максимальных перемещений по окружности венца.

Имея в виду, что

$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \text{ и } e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

уравнение (4) может быть приведено к системе

$$[K_{\text{аа}} + K_{\text{вв}} + (K_{\text{ав}} + K_{\text{ва}})\cos\alpha]\,q^* - [K_{\text{ав}} - K_{\text{ва}}]\sin\alpha\cdot q^{**} = 0;$$
$$[K_{\text{ав}} - K_{\text{ва}}]\sin\alpha\, q^* + [K_{\text{аа}} + K_{\text{вв}} + (K_{\text{ав}} + K_{\text{ва}})\cos\alpha]\,q^{**} = 0.$$

Условие нетривиальности решения этой системы уравнений будет обеспечено, если определитель, составленный из матриц, представляющих коэффициенты при неизвестных, приравнять нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} [K_{\text{аа}} + K_{\text{вв}} + (K_{\text{ав}} + K_{\text{ва}})\cos\alpha] & -[K_{\text{ав}} - K_{\text{ва}}]\sin\alpha \\ [K_{\text{ав}} - K_{\text{ва}}]\sin\alpha & [K_{\text{аа}} + K_{\text{вв}} + (K_{\text{ав}} + K_{\text{ва}})\cos\alpha \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Это выражение является уравнением частот лопаточного венца. Для решения его нужно располагать матрицами $K_{\text{аа}}$, $K_{\text{вв}}$ и $K_{\text{ав}}$, которые определяются конкретным видом периода структуры системы. Для получения полного спектра собственных частот решение необходимо производить для всех значений $\alpha = \frac{2\pi}{S}\lambda$, т. е. для $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \frac{S}{2}$ при четном S и $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \frac{S-1}{2}$ при нечетном S.

После того, как найдены собственные частоты и для каждой из них определены конкретные численные значения элементов квадратных матриц $K_{аа}$, $K_{вв}$, $K_{ав}$ и $K_{ва}$, из уравнений (7), с точностью до постоянного множителя могут быть найдены значения элементов матриц-столбцов

$$\begin{matrix} q^* = \{ q_n^* \} \\ q^{**} = \{ q_n^{**} \} \end{matrix}, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Это определит форму колебаний венца.

Как видно из [2], волны деформаций различных компонентов могут быть сдвинуты по фазе в окружном направлении.

Максимальные значения компонент перемещений по окружности венца определяются из

$$q_{\max}^n = \left| \sqrt{q_n^{*2} + q_n^{**2}} \right|, \tag{9}$$

а сдвиг по фазе из

$$\operatorname{tg} \rho_n = \frac{q_n^{**}}{q_n^*}. \tag{10}$$

$$| K_{аа} + K_{вв} + 2K_{ав} \cos \alpha | = 0.$$

Таким образом, решение задачи о свободных колебаниях лопаточного венца сводится к построению матрицы динамических жесткостей периода структуры его с последующим решением стандартного уравнения частот (8) для всех чисел волн деформаций λ из числа допустимых.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дондошанский. Расчет колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. М.—Л., «Машиностроение», 1965.

2. В. А. Смольников. Расчет свободных колебаний замкнутой рамной системы с циклической симметрией. «Динамика и прочность машин». Н.—Л., Машгиз, 1960. (Труды ЛПИ, № 210).

3. В. П. Иванов. О некоторых вибрационных свойствах упругих систем, обладающих циклической симметрией. «Вопросы прочности элементов авиационных конструкций». Труды КуАИ, вып. XXIX.