КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XIX. 1965 г.
Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей

В. Н. ХИВИНЦЕВ

К ВОПРОСУ О ЖЕСТКОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ТИПА ПЛОСКИХ ФЕРМ

Для определения деформаций в стержневых системах пользуются интегралом Мора, который для ферм приобретает вид:

$$f = \sum \frac{N_i \cdot \overline{N}_i \, l_i}{E_i \cdot F_i}. \tag{1}$$

Эта общепринятая методика требует определения усилий в каждом стержне при действии основной и единичной нагрузок. Естественно, что для ферм с большим количеством стержней, да к тому же еще и статически неопределимых, процесс определения деформаций становится слишком трудоемким.

Но если конструкция носит регулярный характер, что оказывается выгодно с точки зрения жесткости и веса фермы, то расчет деформаций может быть значительно упрощен. Для таких ферм усилия в стержнях и их длины могут быть выражены простой функцией от размеров фермы и нумерации стержней. В этом случае интеграл Мора приобретает конечное выражение для сколь угодно большого количества стержней.

Это обстоятельство позволяет значительно проще определять деформации и в статически неопределимых фермах, а в некоторых случаях получать конечные выражения для прогибов при n-ой степени статической неопределимости.

Ниже рассматриваются некоторые примеры определения деформаций в плоских регулярных фермах и дается анализ влияния геометрических характеристик на жесткость.

КОНСОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ ФЕРМА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЯСАМИ

Для фермы, изображенной на фиг. 1, нужно определить вертикальное перемещение в узле O.

На схеме даны геометрические размеры и нумерация стержней по поясам и раскосам.

Для расчета принимается:

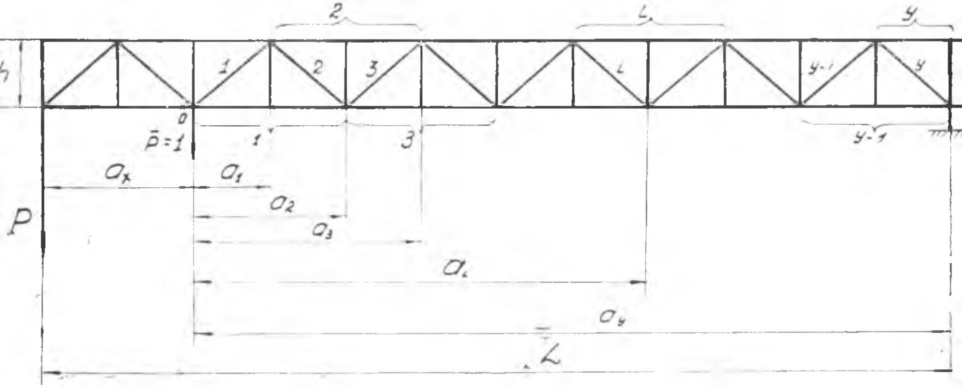
$E = \text{const}$

$F = \text{const}$ — площадь сечения стержней по поясам;

$F_p = k \cdot F = \text{const}$ — площадь сечения стержней решетки;

$i = 1, 2, 3 \cdots y$ — целые последовательные числа;

n — число секций в ферме.



Фиг. 1.

Все стойки в ферме неработающие, поэтому прогиб в узле O будет обусловлен только усилиями в поясах и раскосах.

$$f_x = f_п + f_p, \tag{2}$$

где $f_п$ — составляющая прогиба от усилий в поясах;

f_p — составляющая прогиба от усилий в раскосах.

Определим $f_п$.

$$f_п = \sum \frac{N_{iп} \cdot \overline{N}_{iп} \cdot l_{iп}}{EF}, \tag{3}$$

Здесь $N_{iп} = \frac{P(a_x + a_i)}{h}$ — усилие в i-ом поясе от основной нагрузки P;

$\overline{N}_{iп} = \frac{a_i}{h}$ — усилие в i-ом поясе от единичной нагрузки $\overline{P} = 1$.

Для вычисления прогиба знак усилия в данном случае не играет роли, т. к. для всех стержней от основной и единичной нагрузок знаки усилий либо одинаковы, либо противоположны. В первом случае произведение $N_i \overline{N}_i$ будет всегда положительно, во втором — отрицательно. Поэтому в дальнейшем знак усилия не принимается во внимание.

$l_{iп} = (a_{i+1} - a_{i-1})$ — длина i-го стержня по поясу.

Подставив значения $N_{iп}$; $\overline{N}_{iп}$ и $l_{iп}$ в (3) получим:

$$f_п = \frac{P}{EFh^2} \left[\sum a_i^2 (a_{i+1} - a_{i-1}) + a_x \sum a_i (a_{i+1} - a_{i-1})\right].$$

Если $l_{1п} = a_2$, а $l_{yп} = a_y - a_{y-1}$, то указанные суммы в квадратных скобках преобразуются к виду:

$$\sum a_i^2 (a_{i+1} - a_{i-1}) = a_y^3 - \sum_1^{y-1} a_i\, a_{i+1}\, (a_{i+1} - a_i).$$

$\sum a_i\ (a_{i+1} - a_{i-1}) = a_y^2$ и выражение для прогиба от усилий в поясах:

$$f_п = \frac{P}{EFh^2}\left[a_y^2 (a_y + a_x) - \sum_1^{y-1} a_i\, a_{i+1}\, (a_{i+1} - a_i)\right]. \tag{4}$$

Для регулярной фермы расстояние между узлами по поясам постоянное и примем его равным a. В этом случае очевидно, что $a_i = a \cdot i$ и

$$f_п = \frac{P}{EFh^2}\left[a^3 y^2 (y + x) - a^3 \sum_1^{y-1} (i^2 + i)\right].$$

Если использовать суммы конечных числовых рядов —

$$\sum_1^n i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}; \quad \sum_1^n i = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

то выражение для $f_п$ примет конечный вид:

$$f_п = \frac{Pa^3}{EFh^2}\left[y^2 (y + x) - \frac{y\,(y^2 - 1)}{3}\right],$$

но $y = n - x$ и

$$f_п = \frac{Pa^3\,(n - x)}{3EFh^2}\,[(n - x)\,(2n + x) + 1]. \tag{5}$$

Определим $f_р$

$$f_р = \sum \frac{N_{iр} \cdot \overline{N}_{iр} \cdot l_{iр}}{EкF}. \tag{6}$$

Здесь $N_{iр} = \frac{P \cdot l_{iр}}{h}$ — усилие в i-ом раскосе от основной нагрузки P;

$\overline{N}_{iр} = \frac{l_{iр}}{h}$ — усилие в i-ом раскосе от единичной нагрузки $\overline{P} = 1$.

Подставив $N_{iр}$, $\overline{N}_{iр}$ в (6), получим:

$$f_р = \frac{P}{EkFh^2} \sum_1^y l_{iр}^3. \tag{7}$$

Для регулярной фермы длина раскосов постоянная и равна:

$$l_{iр} = l = \text{const}; \ l = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Тогда прогиб от усилий в раскосах для регулярной фермы примет конечное выражение:

$$f_р = \frac{Pl^3 y}{EkFh^2} = \frac{Pl^3\,(n - x)}{EkFh^2}. \tag{8}$$

А общая формула для определения прогиба в узле О, находящемся на расстоянии x секций от узла, где приложена сила P, запишется:

$$f_x = \frac{P(n-x)}{EFh^2}\left[a^3 \cdot \frac{(n-x)(2n+x)+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right]. \quad (9)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение упругой линии.

При $x = n$; $f_x = 0$;
$x = 0$; $f_x = f_{\max}$,

$$f_{\max} = \frac{Pn}{EFh^2}\left[a^3 \cdot \frac{2n^2+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right]. \quad (10)$$

Анализ геометрических соотношений

Одной из характеристик жесткости стержневых систем является силовой вес — G_c

$$G_c = \sum |N_i| \cdot l_i.$$

Это понятие было введено профессором Комаровым А. А.

Смысл силового веса состоит в том, что чем меньше усилия и короче пути, по которым передаются эти усилия в конструкции, тем она выгоднее в весовом и жесткостном отношениях. Иными словами, минимум силового веса определяет наивыгоднейшую конструкцию.

Для вычисления G_c необходимо принять: $x = 0$; $y = n$.

$$G_c = \sum_1^n \frac{Pa \cdot i}{h} \cdot 2a - \frac{Pa \cdot n}{h} a + \sum_1^n \frac{Pl}{h} \cdot l =$$

$$= P\left(\frac{L^2}{h} + L\frac{l^2}{a \cdot h}\right).$$

Для регулярной фермы угол между стойкой и раскосом — $\alpha = \text{const}$ и

$$G_c = P\left(\frac{L^2}{h} + \frac{L}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}\right). \quad (11)$$

Отсюда можно определить наивыгоднейший угол $\alpha_{\text{наив}}$, при котором $G_c = G_{c\,\min}$

$$\frac{\partial G_c}{\partial \alpha} = P\,\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}\;L = 0$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \text{ и } \alpha_{\text{наив}} = 45°.$$

Как изменяется силовой вес и деформации при нарушении регулярности конструкции?

Сдвинем узел i вправо на величину Δ, как показано на фиг. 2. В этом случае изменятся усилия в поясе i и раскосах i и $(i+1)$. Изменится при этом и длина поясов $(i+1)$ и $(i-1)$ и раскосов i и $(i+1)$.

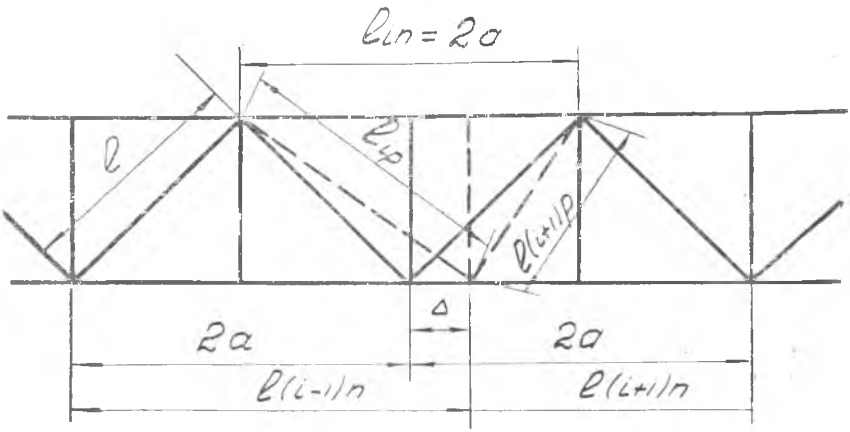
Длины остальных стержней и усилия в них останутся прежними, т. о. изменение G_c и f будет происходить за счет указанных изменений усилий и длин стержней.

Изменение силового веса можно записать так:

$$\Delta G_c = -\frac{Pa\cdot i\cdot 2a}{h} - \frac{Pa\,(i-1)\cdot 2a}{h} - \frac{Pa\cdot(i+1)\cdot 2a}{h} +$$

$$+\frac{P\,(ai+\Delta)\,2a}{h} + \frac{Pa\,(i-1)\,(2a+\Delta)}{h} +$$

$$+\frac{Pa\,(i+1)\,(2a-\Delta)}{h} - 2P\,\frac{l^2}{h} + \frac{Pl_{ip}^2}{h} + \frac{Pl_{(i+1)\,p}^2}{h}.$$



Фиг. 2.

После несложных преобразований:

$$\Delta G_c = \frac{2P\Delta^2}{h}. \tag{12}$$

Т. о., смещение любого узла относительно его положения в регулярной ферме в любую сторону приводит к увеличению силового веса.

Изменение прогиба в этом же случае — Δf.

$$\Delta f = -\frac{2Pa^3i^2}{h^2EF} - \frac{2Pa^3\,(i-1)^2}{h^2EF} - \frac{2Pa^3\,(i+1)^2}{h^2EF} - \frac{2Pl^3}{h^2kEF} +$$

$$+\frac{2Pa\,(a\cdot i+\Delta)^2}{h^2EF} + \frac{Pa^2\,(i-1)^2}{h^2EF}\,(2a+\Delta) + \frac{Pa^2\,(i+1)^2}{h^2EF}\,(2a-\Delta) +$$

$$+\frac{Pl_{ip}^3}{h^2kEF} + \frac{Pl_{(i+1)\,p}^3}{h^2kEF}.$$

После несложных преобразований:

$$\Delta f = \frac{Pa}{h^2EF}\left[2\Delta^2 + \frac{1}{ka}\,(l_{ip}^3 + l_{(i+1)\,p}^3 - 2l^3)\right]. \tag{13}$$

Очевидно, что выражение в круглых скобках всегда положительно и, следовательно, можно сделать вывод:

смещение любого узла относительно его положения в регулярной ферме в любую сторону приводит к уменьшению жесткости.

Кроме этого, за счет дополнительного прироста длины раскосов ($l_{ip}+l_{(i+1)\,p} > 2l$) будет наблюдаться прирост веса фермы.

Из всего вышеизложенного следует вывод: регулярная конструкция с углом наклона раскосов $\alpha_{\text{наив}}=45^\circ$ будет **наивыгоднейшей**.

О выборе наивыгоднейшего $k=\frac{F_p}{F}$

С увеличением k, или что тоже — площади сечения раскосов, прогиб уменьшается. Но одновременно с этим растет и вес фермы, что добавляет прогиб от собственного веса. Отсюда, если произведение веса фермы — G на прогиб будет минимальным, то k будет наивыгоднейшим.

Вес фермы, без учета веса стоек, т. к. стойки не работают, запишется:

$$G=nF\gamma(2a+kl).$$

Здесь γ — удельный вес материала фермы.

$$G\cdot f_{\max}=\frac{Pn^2\gamma}{Eh^2}(2a+kl)\left(a^3\cdot\frac{2n^2+1}{3}+\frac{l^3}{k}\right);$$

$$\frac{\partial(G\cdot f_{\max})}{\partial k}=\frac{Pn^2\gamma}{Eh^2}\left(a^3\cdot l\,\frac{2n^2+1}{3}-\frac{2a\cdot l^3}{k^2}\right)=0.$$

Отсюда следует:

$$k_{\text{наив}}=\frac{l}{a}\sqrt{\frac{6}{2n^2+1}}$$

или при $\alpha=45^\circ$.

$$k_{\text{наив}}=\frac{3,47}{\sqrt{2n^2+1}}.$$

С увеличением n, $k_{\text{наив}}$ уменьшается. Это связано с тем, что чем больше L при постоянном h, тем большая доля энергии приходится на пояса.

ФЕРМА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЯСАМИ НА ДВУХ ОПОРАХ С ОДНИМ ЗАДЕЛАННЫМ КОНЦОМ

Если ферма статически неопределима, то формула (1) остается в силе и для нее. В данном случае усилия N_i и $\overline{N}_i$ будут определены от основной и единичной нагрузок статически неопределимой фермы. Лишние связи для решения основной и единичной систем будут одни и те же.

Если X_1; X_2; X_3;... X_n — лишние неизвестные в статически неопределимой ферме при действии основной нагрузки P;

Y_1; Y_2; Y_3;... Y_n — лишние неизвестные в статически неопределимой ферме при действии единичной нагрузки $\overline{P}=1$, то

$$N_i = N_{i0} + X_1 \cdot \overline{N}_{i1} + X_2 \overline{N}_{i2} + X_3 \overline{N}_{i3} + \cdots + X_n \overline{N}_{in};$$

$$\overline{N}_i = \overline{N}_{i0} + Y_1 \cdot \overline{N}_{i1} + Y_2 \overline{N}_{i2} + Y_3 \overline{N}_{i3} + \cdots + Y_n \cdot \overline{N}_{in}.$$

Если значения усилий N_i и $\overline{N}_i$ подставить в (1):

$$f_x = \sum \frac{l_i}{E_i F_i} (N_{i0} + X_1 \overline{N}_{i1} + X_2 \overline{N}_{i2} + X_3 \overline{N}_{i3} + \cdots +$$

$$+ X_n \cdot \overline{N}_{in}) (\overline{N}_{i0} + Y_1 \overline{N}_{i1} + Y_2 \overline{N}_{i2} + Y_3 \overline{N}_{i3} + \cdots + Y_n \cdot \overline{N}_{in}) =$$

$$= \sum \frac{l_i}{E_i F_i} [N_{i0} \cdot \overline{N}_{i0} + X_1 \cdot \overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_{i1} + X_2 \cdot \overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_{i2} +$$

$$+ X_3 \cdot \overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_{i3} + \cdots + X_n \cdot \overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_{in} + Y_1 (N_{i0} \cdot \overline{N}_{i1} +$$

$$+ X_1 \cdot \overline{N}_{i1}^2 + X_2 \cdot \overline{N}_{i1} \cdot \overline{N}_{i2} + X_3 \cdot \overline{N}_{i1} \cdot \overline{N}_{i3} + \cdots + X_n \cdot \overline{N}_{i1} \cdot \overline{N}_{in}) +$$

$$+ Y_2 (N_{i0} \cdot \overline{N}_{i2} + X_1 \cdot \overline{N}_{i2} \cdot \overline{N}_{i1} + X_2 \cdot \overline{N}_{i2}^2 + X_3 \cdot \overline{N}_{i2} \cdot \overline{N}_{i3} +$$

$$+ \cdots + X_n \cdot \overline{N}_{i2} \cdot \overline{N}_{in}) + Y_3 (N_{i0} \cdot \overline{N}_{i3} + X_1 \cdot \overline{N}_{i3} \cdot \overline{N}_{i1} +$$

$$+ X_2 \overline{N}_{i3} \cdot \overline{N}_{i2} + X_3 \overline{N}_{i3}^2 + \cdots + X_n \overline{N}_{i3} \cdot \overline{N}_{in}) +$$

$$+ \cdots + Y_n (N_{i0} \cdot \overline{N}_{in} + X_1 \cdot \overline{N}_{in} \cdot \overline{N}_{i1} +$$

$$+ X_2 \cdot \overline{N}_{in} \cdot \overline{N}_{i2} + X_3 \cdot \overline{N}_{in} \cdot \overline{N}_{i3} + \cdots + X_n \cdot \overline{N}_{in}^2)].$$

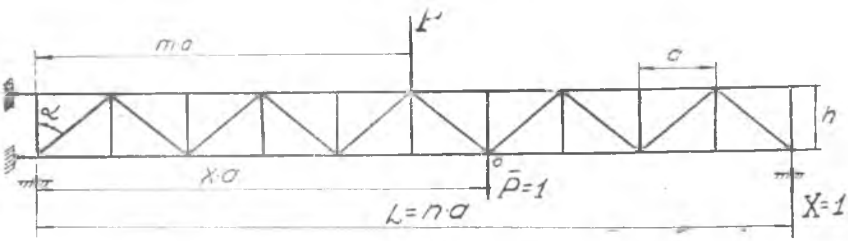
Нетрудно видеть, что выражения в круглых скобках представляют систему канонических уравнений для определения X_i, следовательно:

$$f_x = \sum \frac{N_{i0} \cdot \overline{N}_{i0} \cdot l_i}{E_i F_i} + X_1 \sum \frac{\overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_{i1} \cdot l_i}{E_i F_i} +$$

$$+ X_2 \sum \frac{\overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_{i2} \cdot l_i}{E_i F_i} + X_3 \sum \frac{\overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_{i3} \cdot l_i}{E_i F_i} + \cdots + X_n \sum \frac{\overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_{in} \cdot l_i}{E_i F_i} =$$

$$= f_0 + X_1 \overline{\Delta}_{1p} + X_2 \overline{\Delta}_{2p} + X_3 \cdot \overline{\Delta}_{3p} + \cdots + X_n \overline{\Delta}_{np};$$

$$f_x = f_0 + \sum X_i \cdot \overline{\Delta}_{ip}. \qquad (14)$$



Фиг. 3.

Или по аналогии:

$$f_x = f_0 + \sum Y_i \cdot \Delta_{ip}.$$

Здесь f_0 — прогиб для статически определимой системы.

Для фермы, изображенной на фиг. 3, выражение (14) будет иметь вид:

$$f_x = f_0 + X\overline{\Delta}_p.$$

(Система однажды статически неопределима).

Каноническое уравнение: $\Delta_p + X\delta = 0$.

Отсюда: $X = -\frac{\Delta_p}{\delta}$.

$$\Delta_p = \sum \frac{N_{i0} \cdot \overline{N}_i \cdot l_i}{E_i F_i}$$

Δ_p легко определяется при данном выборе лишнего неизвестного по формуле (9), для которой следует принять $x = n - m$

$$\Delta_p = -\frac{Pm}{h^2EF}\left[a^3 \cdot \frac{m(3n-m)+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right].$$

δ определяется по формуле (10).

$$\delta = \sum \frac{\overline{N}_i^2 \cdot l_i}{E_i F_i} = \frac{n}{h^2EF}\left[a^3\,\frac{2n^2+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right].$$

Отсюда легко найти X.

$\overline{\Delta}_p = \sum \frac{\overline{N}_{i0} \cdot \overline{N}_i \cdot l_i}{E_i F_i}$ — определяется по формуле (9).

Здесь следует принять $P = 1$, а вместо x в формулу (9) подставить $n - x$

$$\overline{\Delta}_p = -\frac{x}{h^2EF}\left[a^3\,\frac{x(3n-x)+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right]$$

f_0 определяется по формуле (9) при этом если $x \leq m$, в формуле (9) должно быть n заменено на m, а x на $(m-x)$.

В случае $x \geqslant m$ соответственно n заменяется на x, а x на $(x-m)$.

В окончательном виде уравнение упругой линии для фермы, изображенной на фиг. 3, будет иметь вид:

1. Участок $x \leq m$.

$$f_x = \frac{P \cdot x}{h^2EF}\left\{a^3\,\frac{x(3m-x)+1}{3} + \frac{l^3}{k} - \right.$$
$$\left. - \frac{m}{n}\,\frac{\left[a^3\,\frac{m(3n-m)+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right]\left[a^3\,\frac{x(3n-x)+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right]}{a^3\,\frac{2n^2+1}{3} + \frac{l^3}{k}}\right\}.$$

2. Участок $x \geqslant m$.

$$f_x = \frac{Pm}{h^2EF}\left\{a^3\,\frac{m(3x-m)+1}{3} + \frac{l^3}{k} - \right.$$
$$\left. - \frac{x}{n}\,\frac{\left[a^3\,\frac{m(3n-m)+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right]\left[a^3\,\frac{x(3n-x)+1}{3} + \frac{l^3}{k}\right]}{a^3 \cdot \frac{2n^2+1}{3} + \frac{l^3}{k}}\right\}.$$

В заключение следует указать, что приведенная методика определения перемещений в регулярных стержневых системах легко распространяется и на другие виды ферм регулярных конструкций и нагрузок.

А регулярность конструкции, дающая возможность получить конечные формулы для перемещений, силового веса и др., позволяет выбрать наивыгоднейшую ферму с точки зрения веса и жесткости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. М. Рабинович.* «Основы строительной механики стержневых систем», Госстройиздат, 1960.

2. *А. Д. Дарков, В. И. Кузнецов.* «Строительная механика». Высшая школа, 1962.