

*В. П. ИВАНОВ, Н. Д. СТЕПАНЕНКО*

### **К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СПЕКТРОВ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ И ЧАСТОТ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН**

У современных турбомашин значительная часть спектра собственных частот лопаток располагается в диапазоне частот возбуждения, где вероятно появление возбуждающих сил высокой интенсивности. Об этом свидетельствуют факты высокочастотных усталостных разрушений лопаток при доводке и эксплуатации газотурбинных двигателей.

Анализируя причины дефектов этого рода, а также разрабатывая мероприятия по борьбе с ними, необходимо четко ориентироваться в спектре собственных форм и частот.

К сожалению, чисто теоретические методы в настоящее время не могут являться той базой, на основе которой с необходимой достоверностью можно определить полный спектр собственных форм и частот лопаток, соответствующий заданной полосе частот возбуждения. В связи с этим приходится отдавать предпочтение экспериментальным методам.

Однако использование чисто экспериментальных методов не исключает возможности существенных, а порой принципиальных ошибок, главными причинами которых являются:

1) большая вероятность полигармонического состава возбуждающей силы. Это может привести к ошибочному включению в заданный диапазон частот возбуждения «ложных» собственных движений;

2) вероятная ортогональность возбуждения к ряду собственных движений лопаток. Это может повлечь за собой их пропуск;

3) в спектр собственных движений лопаток могут быть ошибочно включены собственные движения системы «лопатка—вибростенд».

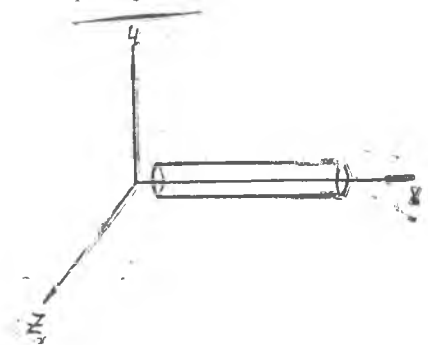
В связи с этим разработка рекомендаций, которые при проведении эксперимента облегчили бы ориентацию в спектре собственных движений лопатки, представляет определенный практический интерес.

Наиболее систематической, на наш взгляд, попыткой, принятой в этом направлении, является работа Гринстеда\*. Она явилась результатом обработки, анализа и обобщения большого количества экспериментальных материалов по определению спектров узловых линий и частот для различного рода пластин, в том числе и лопаток турбомашин.

В настоящей работе сделана попытка подойти к вопросам классификации собственных движений лопаток с других позиций.

## 1. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Под прямым стержнем будем понимать упругую и прямую линию с распределенной по длине массой.



Фиг. 1. Стержень. Система координат.

Всю совокупность собственных движений стержня можно подразделить на три класса — по числу измерений пространства (фиг. 1).

К классу  $X$  относятся продольные колебания стержня. К классу  $U$  изгибные колебания стержня в плоскости  $UOX$ . К классу  $Z$  изгибные колебания в плоскости  $ZOX$ .

В случае прямого стержня движения, относящиеся к различным классам, ортогональны геометрически и поэтому могут рассматриваться изолированно.

а) *Изгибные колебания свободного прямого стержня.* Классы  $U$  и  $Z$  качественно идентичны, поэтому остановимся только на рассмотрении собственных движений класса  $U$ .

Первым собственным движением этого класса является поступательное перемещение стержня в направлении оси  $U$ . Ему соответствует нулевая собственная частота. Вторым собственным движением, также имеющим нулевую частоту, является поворот его вокруг центра тяжести в плоскости  $UOX$ . Третье собственное движение уже сопровождается деформацией связей и частота его отлична от нуля. Форма колебаний имеет три пучности и два узла. Четвертое собственное движение имеет четыре пучности и

\* Grinsted B., Nodal Rattern analysis, Pros. AIME, 1952, v. 166, № 3.

три узла при более высокой частоте и т. д. Номер собственного движения соответствует числу пучностей его.

Каждому собственному движению стержня соответствует минимальная эквивалентная модель с дискретными массами, позволяющая качественно описать этот вид движения.

Минимальной эквивалентной моделью первого собственного движения будет одна дискретная масса, моделью второго — две связанных дискретных массы, моделью третьего — три упруго связанных дискретных массы и т. д.

Минимальная эквивалентная модель данного собственного движения пригодна для качественного описания всех предыдущих (по частоте) собственных движений данного класса, поскольку она обладает необходимым числом степеней свободы (масс), но по отношению к ним уже не будет минимальной.

Очевидно, что если определено собственное движение данного класса, описываемое минимальной эквивалентной моделью с дискретными массами, то на отрезке частот от 0 до  $P_k$ , где  $P_k$  — частота данного собственного движения, должно располагаться  $K-1$  собственных частот (включая нулевые), соответствующих более простым собственным движениям этого класса.

При монотонном изменении параметров сечений по длине стержня зависимость собственных частот его от соответствующих номеров представляется плавной кривой с первой и второй положительными производными.

б) *Варианты закрепления стержня, полученные наложением элементарных связей на разные точки его.* Элементарная связь данного класса исключает возможность перемещения точки, к которой она приложена, в направлении, соответствующем данному классу.

Наложение элементарной связи эквивалентно неограниченному увеличению элементарной точечной массы, к которой она приложена. Поэтому наложение на стержень одной дополнительной элементарной связи, независимо от того, в какой точке она приложена, может только понизить частоты собственных движений или оставить некоторые из них без изменения. Одна дополнительная элементарная связь снижает до нуля минимальную собственную частоту (из числа отличных от нуля). Если предположить, что точка, на которую наложена элементарная связь, всегда соответствует пучности с бесконечно малой амплитудой перемещений, то собственные движения стержня с любыми вариантами закрепления могут быть описаны теми же эквивалентными моделями, что и собственные движения свободного стержня.

На фиг. 2 представлены собственные движения прямого стержня с различными вариантами наложения связей. В столбце таблицы внесены качественно одинаковые собственные движения, т. е. такие, которым соответствуют минимальные эквивалентные модели с одним и тем же числом дискретных масс. Этим движениям, несмотря на различие в закреплениях, соответствует равное

число максимумов напряжений. Защемление эквивалентно достаточно близкому расположению двух элементарных связей.

Для облегчения исследования нумерацию\* собственных движений стержня с тем или иным закреплением можно вести, исключив собственные движения с нулевыми частотами. Тогда номер собственного движения может быть определен как  $m = k - f$ , где  $f$  — число элементарных связей, наложенных на свободный стержень.

$K$ Исход. движение	1	2	3	4	5	6	7
эквивалентная модель							
своб-своб							
оперт-своб							
оперт-оперт							
защемл-своб							
защемл-оперт							
защемл-защемл							

Фиг. 2. Собственные движения стержней при различных граничных условиях и соответствующие им эквивалентные минимальные модели.

в) Собственные движения других классов и полный спектр собственных частот и движений прямого стержня. Движения класса  $Z$ , как уже отмечалось, качественно идентичны движениям класса  $У$ . К классу  $X$  относятся продольные перемещения и колебания стержня. Как и в предыдущем случае, каждому собственному движению класса  $X$  будет соответствовать минимальная эквивалентная модель, масса которой связана упругими элементами, ориентированными в направлении оси  $X$ . Качественная сторона вопроса остается прежней.

## II. КЛАССИФИКАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Всю совокупность собственных движений пластинки подразделим на три класса — по числу измерений пространства. В прямоугольной системе координат (фиг. 3) — это классы  $X$ ,  $У$ ,  $Z$ .

У прямоугольной плоской пластинки собственные движения различных классов ортогональны геометрически, поэтому движе-

ния различных классов можно рассматривать изолированно. Наибольший практический интерес представляют изгибные колебания класса  $Z$ .

Главной задачей при теоретическом и экспериментальном исследовании колебаний пластинок является определение и приведение в соответствие собственных форм и частот.

Формы свободных изгибных колебаний плоской пластинки класса  $Z$  описываются уравнением:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - k^4 W = 0,$$

где  $W(x, y)$  — смещение точек срединной поверхности в направлении оси  $Z$ .

$$k^4 = \frac{\gamma h p^2}{Dg},$$

здесь  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жесткость;

$\gamma$  — весовая плотность материала пластинки;

$h$  — толщина пластинки;

$E$  — модуль упругости 1-го рода;

$\mu$  — коэффициент Пуассона;

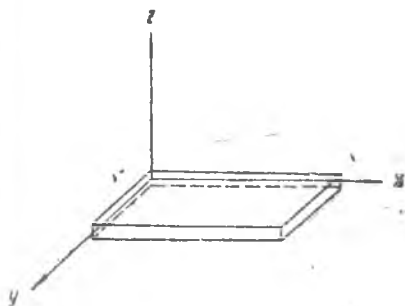
$P$  — собственная частота.

Известно, что точное решение этого уравнения, позволяющее построить весь спектр собственных движений, может быть получено только для случая шарнирного закрепления двух противоположных сторон. Но наибольший интерес представляет случай с пластинкой, заземленной одним краем.

В то же время, если упругие свойства пластинки ослабить соответствующим образом, точное решение может быть получено для любого варианта закрепления сторон.

а) *Гипотетическая пластинка.* Такой гипотетической моделью пластинки постоянной толщины может быть конструкция, состоящая из достаточно большого числа взаимно перпендикулярных стержней равного сечения, осевые линии которых расположены на срединной поверхности, а в точках пересечения их осуществлена шарнирная связь, допускающая свободный поворот элементов стержней как в плоскостях, параллельных  $XOZ$ , так и в плоскостях, параллельных  $YOZ$ . Осуществление связи лишь в точках пересечения осевых линий позволяет предположить, что  $\mu = 0$ . Осуществление же только шарнирных связей позволяет считать, что  $\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$ .

Формы и частота свободных колебаний такой гипотетической пластинки опишутся уравнением:



Фиг. 3. Прямоугольная пластинка. Система координат.

$$\frac{\partial^4 W_*}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W_*}{\partial y^4} - k_*^4 W_* = 0,$$

где  $W_*(x, y)$  — смещение точек гипотетической пластинки в направлении оси  $z$ ,

$$k_*^4 = \frac{12\gamma P_*^2}{Eh^2\rho};$$

$P_*$  — собственная частота гипотетической пластинки.

Решение этого уравнения для любого варианта закрепления прямоугольной гипотетической пластинки может быть представлено в виде:

$$W_* = \sum_{\kappa, L=1}^{\infty} u_{\kappa}(x) v_L(y),$$

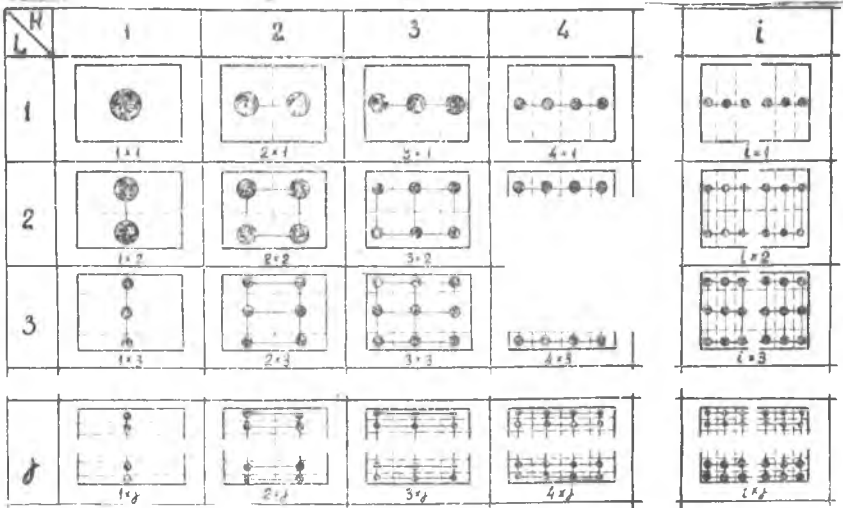
где  $u_{\kappa}(x)$  и  $v_L(y)$  — собственные формы изолированных взаимно-перпендикулярных стержней, составляющих гипотетическую пластинку, при граничных условиях, соответствующих характеру закрепления сторон.

Полный же спектр собственных частот ее определяется из

$$P_{\kappa \times L}^2 = P_{\kappa}^2 + P_L^2,$$

где  $P_{\kappa}$  и  $P_L$  — собственные частоты соответствующих стержней.

Полный спектр собственных форм и частот может быть построен по спектру собственных форм и частот составляющих стержней.



Фиг. 4. Спектр собственных форм свободной гипотетической пластинки и соответствующие минимальные эквивалентные модели.

$$M \times N = K \times L$$

№ п/п	1	2	3	4	5	6
1(1)						
2(2)						
3(3)						
4(4)						

$$M \times N = (K-2) \times L$$

№ п/п	1	2	3(1)	4(2)	5(3)	6(4)
1(1)						
2(2)						
3(3)						
4(4)						

$$M \times N = (K-4) \times L$$

№ п/п	1	2	3	4	5(1)	6(2)
1(1)						
2(2)						
3(3)						
4(4)						

$$M \times N = (K-1) \times L$$

№ п/п	1	2(1)	3(2)	4(3)	5(4)	6(5)
1(1)						
2(2)						
3(3)						
4(4)						

$$M \times N = (K-3) \times L$$

№ п/п	1	2	3	4(1)	5(2)	6(3)
1(1)						
2(2)						
3(3)						
4(4)						

$$M \times N = (K-4) \times (L-2)$$

№ п/п	1	2	3	4	5(1)	6(2)
1						
2						
3(1)						
4(2)						

Фиг. 5. Единая классификация собственных движений гипотетической пластинки для различных вариантов ее закрепления.

Как следует из решения уравнения, узловые линии, соответствующие любым формам колебаний независимо от граничных условий, представляются прямыми линиями, перпендикулярными сторонам пластинки.

На фиг. 4 представлен спектр собственных форм (узловых линий) свободной гипотетической пластинки.

В случае прямого стержня любое собственное движение данного класса качественно характеризуется одним числом. Для качественного же охарактеризования любого собственного движения класса  $Z$  пластинки требуются два числа.

Нумерацию собственных движений можно вести по соответствующей нумерации собственных движений стержней, составляющих это движение.

Например: движение  $K \times L$  с собственной частотой  $P_{K \times L}$  (фиг. 4), где  $k$  — номер собственного движения (включая нулевые), стержня, параллельного оси  $X$ ;

$L$  — номер собственного движения стержня (включая нулевые), параллельного оси  $Y$ .

В каждой области данного собственного движения гипотетической пластинки, ограниченной узловыми линиями и ее контуром, можно расположить по одной дискретной массе, к которой приведена вся распределенная масса области и тем самым построить минимальную эквивалентную модель. На фиг. 4 приведены эти минимальные эквивалентные модели для свободной пластинки. Число масс минимальной эквивалентной модели данного собственного движения, равное  $K \times L$ , соответствует минимальному числу степеней свободы, необходимому для качественной реализации этого движения.

Опираие какого-либо края пластинки может быть представлено как неограниченное увеличение элементарных концевых масс составляющих стержней, перпендикулярных этому краю. Защемление — как неограниченное увеличение двух концевых элементарных масс, расположенных достаточно близко и т. д. Это дает возможность построить единую классификацию собственных движений пластинки.

На фиг. 5 приведена единая классификация собственных движений гипотетической пластинки с различными вариантами закрепления краев. Собственные движения, которым при различных вариантах закрепления соответствуют одинаковые сочетания чисел  $K$  и  $L$  качественно равнозначны.

Наложение одной элементарной распределенной связи на край пластинки отнимает у каждого из составляющих стержней, перпендикулярных этому краю, одну степень свободы. Поскольку пластинка содержит в себе неограниченное число таких стержней, то наложение этой связи делает невозможным проявление неограниченно большого числа собственных движений определенной категории. На фиг. 5 столбцы и строки, относящиеся к этим категориям движений, оставлены свободными. Переход от

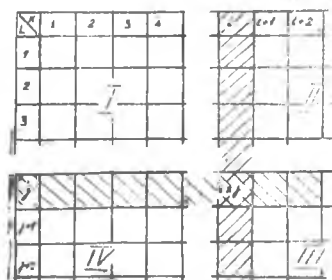


данного вида закрепления пластинки к более жесткому (с большим числом элементарных распределенных связей) влечет за собой падение частот собственных движений, имеющих те же значения  $K$  и  $L$  в единой классификации.

В тех случаях, когда рассматриваются пластинки заданного вида закрепления, нумерацию собственных движений удобнее вести, исключив те виды движения, которые производиться не могут, т. е. вычтя соответствующее число степеней свободы. Так для консольной пластинки, защемленной по краю, параллельному оси  $Y$ , нумерация будет:  $m \times n$ , где  $m = k - 2$  и  $n = L$ ; для пластинки, защемленной по двум смежным сторонам:  $m \times n$ , где  $m = k - 2$  и  $n = L - 2$  и т. д.

Из формулы для частот гипотетической пластинки, имеющей то или иное закрепление, следует: если определено данное собственное движение, т. е. определены числа  $K$  и  $L$ , соответствующие ему, и найдена собственная частота его, то на отрезке частот от нуля до данной частоты должно располагаться не менее, чем  $K \times L$  собственных частот (включая нулевые), соответствующих более простым движениям.

Столбец  $K = i$  и строка  $L = j$ , соответствующие данной форме, делят таблицу форм на квадранты (фиг. 6). Частоты форм, расположенных в I квадранте, включая примыкающие к нему заштрихованные клетки, всегда меньше, а частоты форм, расположенных в III квадранте, включая примыкающие к нему заштрихованные клетки, всегда больше данной собственной частоты. Частоты форм, расположенных во II и IV квадрантах, могут быть меньшими, большими и, в частности, равными частоте  $P_{ikj}$ . Конкретно это зависит от соотношения размеров пластинки.



Фиг. 6. Квадранты таблицы форм.

Таким образом, любое собственное движение гипотетической прямоугольной пластинки постоянной толщины может быть качественно охарактеризовано двумя числами, а приведение в соответствие этих чисел и частот позволяет делать определенные заключения о полноте спектра собственных движений, соответствующего данному диапазону частот.

Совокупность частот собственных движений, расположенную в  $k$ -том столбце, будем именовать  $Y_k$  семейством ( $Y_m$  семейством), а совокупность форм в  $L$ -той строке —  $X_L$  семейством ( $X_L$ -семейством). Формы, расположенные в диагоналях, крайними из которых являются формы  $k \times 1 (m \times 1)$  и  $1 \times L (1 \times n)$ , определим как  $[XY]_{L=k}$ -семейства.

б) *Реальная прямоугольная пластинка постоянной толщины.* Гипотетическая пластинка отличается от реальной устранением определенных упругих связей. Если теперь эти связи вновь плавно наложить, то тем самым будет обеспечен плавный переход от гипотетической пластинки к реальной.

В процессе перехода каждому собственному движению пластинки будет соответствовать строго определенный эквивалент из неограниченного числа собственных движений гипотетической пластинки, хотя формы колебаний и частоты у них могут определенным образом отличаться.

Таким образом, спектр собственных движений гипотетической пластинки определяет полный спектр собственных движений реальной.

Каждое собственное движение реальной пластинки качественно может быть охарактеризовано двумя числами, номер его будет определяться номером соответствующего собственного движения гипотетической пластинки. Форму колебаний гипотетической пластинки с тем же номером, что и у реальной будем именовать исходной формой колебания.

При переходе от гипотетической пластинки к реальной последовательность в изменении собственных частот соответствующих семейств собственных движений  $X_L$  и  $Y_n$  нарушиться не может, поэтому общие частотные свойства таблицы форм, определенные для гипотетической пластинки, сохраняться и для реальной.

### III. ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

Классификация собственных движений, построенная для прямоугольных пластинок постоянного сечения, может быть перенесена на плоские пластинки любой геометрической формы, если воспользоваться принципом сохранения собственных движений, который сформулируем следующим образом:

если для любой материальной плоской пластинки определен полный спектр собственных движений, то при произвольном изменении распределения толщины, формы в плане и граничных условий ее, каждому собственному движению пластинки первоначальной конфигурации будет соответствовать единственное эквивалентное собственное движение в новой конфигурации, которое качественно может быть охарактеризовано двумя числами, представленными в определенной последовательности.

Справедливость этого принципа можно показать, производя плавное изменение геометрии пластинки и следя за изменением собственных форм и частот ее.

При плавном изменении геометрии пластинки собственные формы и частоты будут изменяться плавно, без скачков, при этом имевшиеся собственные движения не исчезнут, а новые не появятся.

Таким образом, каждому собственному движению класса  $Z$  пло-

ской пластинки и произвольной конфигурации будет соответствовать определенный эквивалент из неограниченного числа собственных движений плоской прямоугольной пластинки постоянной толщины и, следовательно, определенный эквивалент из неограниченного числа собственных движений гипотетической пластинки. Поэтому номер каждого собственного движения пластинки произвольной конфигурации будем определять номером соответствующего собственного движения гипотетической.

Система форм колебаний гипотетической по отношению к системе форм данной пластинки будет являться системой исходных форм.

#### IV. ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ТАБЛИЦЫ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КЛАССА Z.

Соотношения размеров лопаток таковы, что частотные свойства таблицы форм, определенные для гипотетической пластинки, остаются в силе.

Если определено данное собственное движение, т. е. определены числа  $K(m)$  и  $L(n)$ , соответствующие ему, и найдена собственная частота его, то на отрезке частот от нуля до данной частоты должно располагаться не менее, чем  $K \times L (m \times n)$  собственных частот, соответствующих более простым движениям.

Столбец и строка таблицы форм, относящиеся к данному собственному движению, делят таблицу форм на четыре квадранта (см. фиг. 6). Как и для гипотетической пластинки, в первом квадранте и в примыкающих к нему заштрихованных графах столбца и строки частоты собственных движений ниже данной, а в третьем и в примыкающих заштрихованных графах выше.

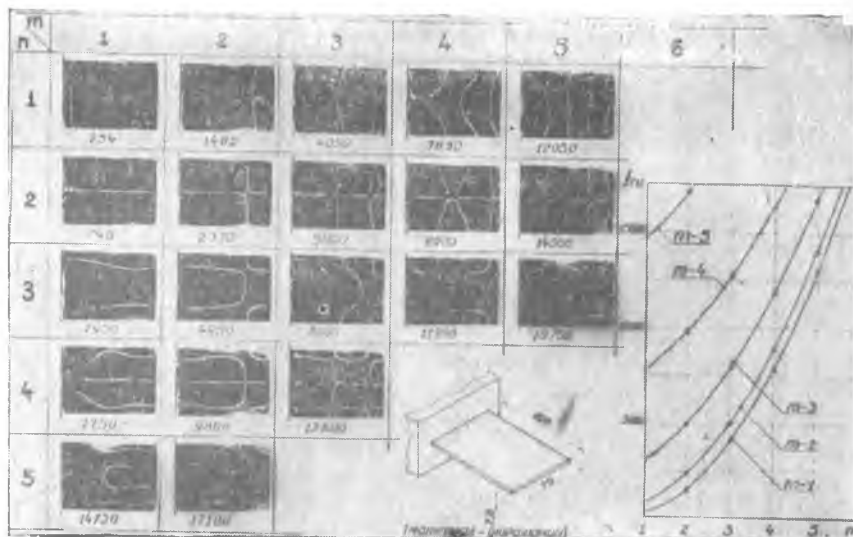
У гипотетической пластинки частота той или иной формы из числа расположенных во II и IV квадрантах могла быть меньшей, большей или равной данной частоте.

У реальной пластинки с одной осью симметрии, которой в частности является консольная прямоугольная пластинка постоянной толщины, частоты двух движений, относящихся к симметричным семействам ( $m \times 1$ ,  $m \times 3$ ,  $m \times 5$  и т. д.) не могут принимать равных значений из-за связанности деформаций в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В равной степени это относится и к частотам кососимметричных семейств. ( $n \times 2$ ,  $n \times 4$ ,  $n \times 6$  и т. д.) Тогда как две собственные частоты, одна из которых относится к симметричному, а другая к кососимметричному семейству, могут принимать при определенных условиях равные значения. Таким образом, частоты тех или иных собственных движений симметричной пластинки из числа расположенных во II и IV квадрантах таблицы форм могут принимать большие или меньшие значения, чем данная, равенство же данной частоты другой может быть достигнуто только в том случае, если одна из них принадлежит симметричному, а вторая кососимметричному семейству.

## V. РАСШИФРОВКА РИСУНКОВ УЗЛОВЫХ ЛИНИЙ

Целью расшифровки рисунков узловых линий является определение места данного собственного движения в таблице форм отражающей полноту спектра собственных движений класса  $Z$ .

Рисунок узловых линий лопаток может более или менее существенно отличаться от рисунка исходных форм.



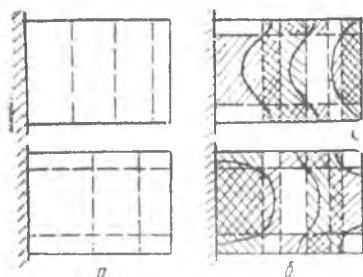
Фиг. 7. Спектр собственных движений класса  $z$  консольной прямоугольной пластинки постоянной толщины.

На фиг. 7 приведен полный спектр форм консольной прямоугольной пластинки постоянного сечения на отрезке частот от 0 до 17500 гц. Большинство собственных форм ее может быть без труда расшифровано. Однако некоторые из них сильно отличаются от исходных форм. Главной причиной этого является близость частот двух собственных движений эквивалентной гипотетической пластинки. Эти собственные движения при трансформации гипотетической пластинки в реальную перестают быть ортогональными, т. е. ортогональные собственные движения гипотетической пластинки преобразуются в ортогональные собственные движения реальной.

На фиг. 7 форма  $3 \times 3$ , относящаяся к симметричному семейству  $m \times 3$ , сильно искажена, тогда как формы  $2 \times 3$  и  $4 \times 3$  того же семейства искажены слабо. Это искажение является следствием интерференции исходных форм  $3 \times 3$  и  $4 \times 1$ . С целью проверки рисунки узловых линий могут быть получены графически известным способом — суммированием соответствующих исходных форм в фазе и противофазе (фиг. 8). Узловые линии проводятся через

области, где перемещения взаимно погашаются и разделяют области с удвоенным перемещением. Аналогичным путем может быть истолковано взаимное искажение симметричных  $5 \times 3$  и  $2 \times 5$  и кососимметричных форм  $4 \times 2$  и  $1 \times 4$ . Нетрудно видеть, что интерферирующие формы располагаются по отношению друг к другу во II и IV квадрантах таблицы форм и имеют сравнительно близкие частоты. Однако появление таких искаженных форм нельзя рассматривать как результат простого сложения двух независимых движений с близкими частотами — это, как отмечалось, преобразование собственных движений гипотетической пластинки в собственные движения реальной, сопровождающееся изменением и раздвижкой частот.

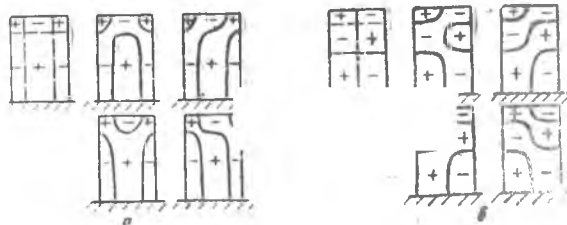
Для появления искаженных форм необходима близость частот и возможность связанности исходных форм. Если частоты достаточно далеки, то искажение будет слабым. Если же частоты близки, но связанность отсутствует, то искажение не появится. Например формы  $3 \times 2$  и  $2 \times 3$  (фиг. 7) имеют весьма близкие частоты, но взаимное искажение их отсутствует, т. к. эти формы ортогональны уже в силу симметрии пластины и переход от гипотетической и реальной пластины интерференции не вызовет. Для того, чтобы появилась связанность этих движений, нужно вести асимметрию.



Фиг. 8. Построение рисунка узловых линий ортогональных форм по рисунку исходных форм.

а) исходные формы; б) ортогональные формы.

Чаще всего искажение исходных форм происходит по пути объединения пучностей, имеющих один знак перемещений и примыкающих к точке пересечения узловых линий на исходной форме.



Фиг. 9. Искажение исходных форм путем объединения пучностей с одним знаком.

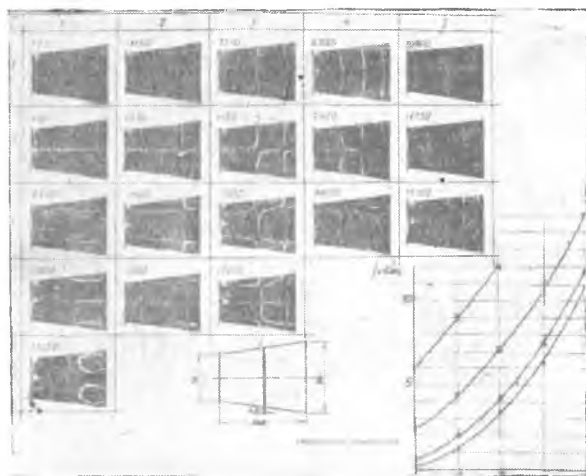
а) форма  $2 \times 3$ ;

б) форма  $3 \times 2$ .

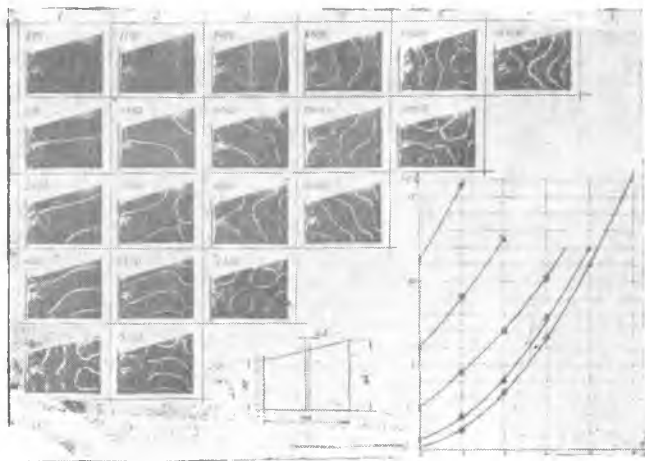
Очевидно, что в этом случае вероятно проявление различных вариантов объединения, но их число ограничено. Как например, фиг. 9 представлены различные варианты возможного проявления формы  $2 \times 3$  и  $3 \times 2$ . Какой именно вариант проявится — зависит от геометрических соотношений пластины. Как правило, общее число пучностей после их объединения соответствует номеру диагонали, в которой располагается данная

форма в таблице. При затруднениях в расшифровке это свойство может быть использовано — число пучностей определяет диагональ таблицы. Место же формы в диагонали может быть определено путем исключения (другие формы данной диагонали проявились четко) или при построении частотных кривых.

Однако число пучностей не всегда соответствует номеру диагонали. В частности, как правило, в тех случаях, когда пучность



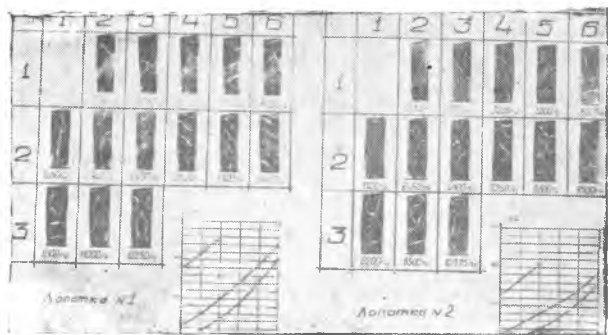
Фиг. 10. Спектр собственных форм и частот консольной симметричной трапециевидной пластинки постоянной толщины.



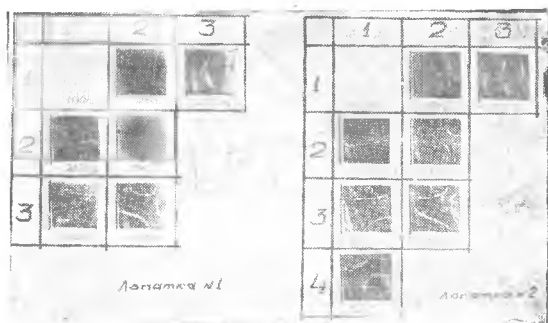
Фиг. 11. Спектр собственных форм и частот консольной асимметричной трапециевидной пластинки постоянной толщины.

не имеет выхода на границу (замкнутая область) общее число пучностей будет на единицу большим, чем номер диагонали, в которой эта форма располагается. Например, форма  $5 \times 3$  на фиг. 7.

Возможны и другие исключения, но расшифровка этих собственных движений не вызывает особых затруднений, если положение ряда форм уже определено.



Фиг. 12. Спектр собственных форм и частот лопаток двух модификаций III ст. компрессора.



Фиг. 13. Спектр собственных форм и частот лопаток двух модификаций X ст. компрессора.

На фиг. 10—13 в качестве примера приведены спектры собственных движений класса  $Z$  плоских заземленных трапециевидных пластинок постоянной толщины и компрессорных лопаток. Здесь же представлены частотные кривые  $X_n$  семейств.

Таблица форм определяет полноту спектра собственных движений класса  $Z$ . Помимо собственных движений этого класса возможны собственные движения классов  $X$  и  $Y$ . К классу  $X$  прежде всего относятся продольные колебания пластины в направлении оси  $X$ , а к классу  $Y$  — продольные в направлении оси  $Y$  и

изгибные колебания в плоскости максимальной жесткости. Для пластины с плоской срединной поверхностью собственные движения различных классов всегда независимы.

Реальные же лопадки имеют обычно закрученную и изогнутую срединную поверхность. Это влечет за собой появление связанности собственных движений различных классов, что в свою очередь может привести к кажущемуся появлению дополнительных собственных движений класса  $Z$  с рисунком узловых линий, напоминающим рисунок одной из расшифрованных уже форм этого класса. Как показывает опыт, в диапазон частот, представляющий практический интерес, попадает первая изгибная форма колебаний в плоскости максимальной жесткости. Не исключено также, что сильная изогнутость и закрученность срединной поверхности приведет к существенному снижению низших собственных частот продольных колебаний классов  $X$  и  $Y$ . Это также приведет к появлению на заданном отрезке частот дополнительных собственных движений помимо тех, которые описываются таблицей форм класса  $Z$ . Поскольку эти частоты лежат, как правило, вне интересующего нас диапазона частот, то классификацию собственных движений удобнее вести, рассматривая движение только класса  $Z$ , имея в виду возможность появления, как исключение, дополнительных движений, частоты которых могут быть ориентировочно оценены приближенным расчетом.

---