

КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОЧНОГО ВЕНЦА С ПОЯСОМ СВЯЗИ

Для снижения уровня резонансных напряжений в лопатках турбомашин применяют различного рода связи, объединяющие лопатки в пакеты или замыкающие их на круг.

Совершенствование расчетных методов для таких систем является одной из важных задач, что и находит свое отражение в литературе [1, 2, 3, 4] и др.

В настоящей работе рассмотрено составление расчетных уравнений для упругой системы, содержащей кольцевой пояс связи.

Рассматриваемая система (рис. 1) состоит из упругого диска 1, обода 2, лопаток 3 и пояса связи 4, который делит лопатки на внутреннюю a_1b_1 и внешнюю a_2b_2 лопаточные части.

Внутренняя лопаточная часть стыкуется с ободом диска в точке a_1 , расположенной на радиусе $R_{в}$ и с поясом связи в точке b_1 , расположенной на радиусе R_c . Внешняя лопаточная часть точкой a_2 присоединяется к поясу связи в точке b_1 , по наружному радиусу R_n лопатки свободны.

Прямоугольная система координат выбрана так, что ось x имеет радиальное направление, ось y — окружное, а ось z направлена по оси ротора. Начало координат расположено в срединной плоскости диска на оси вращения (в точке 0). Кроме того, имеются местные системы координат с тем же направлением осей, но начала их расположены на границах элементов, составляющих упругую систему (рис. 2).

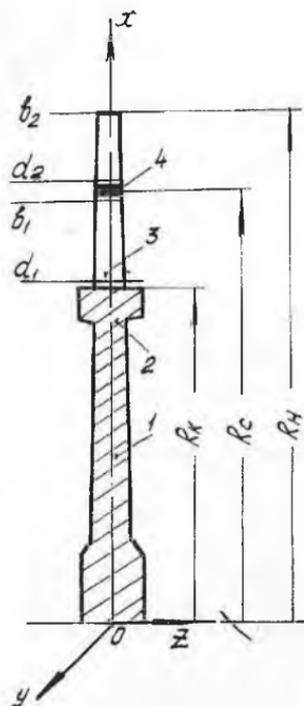


Рис. 1.

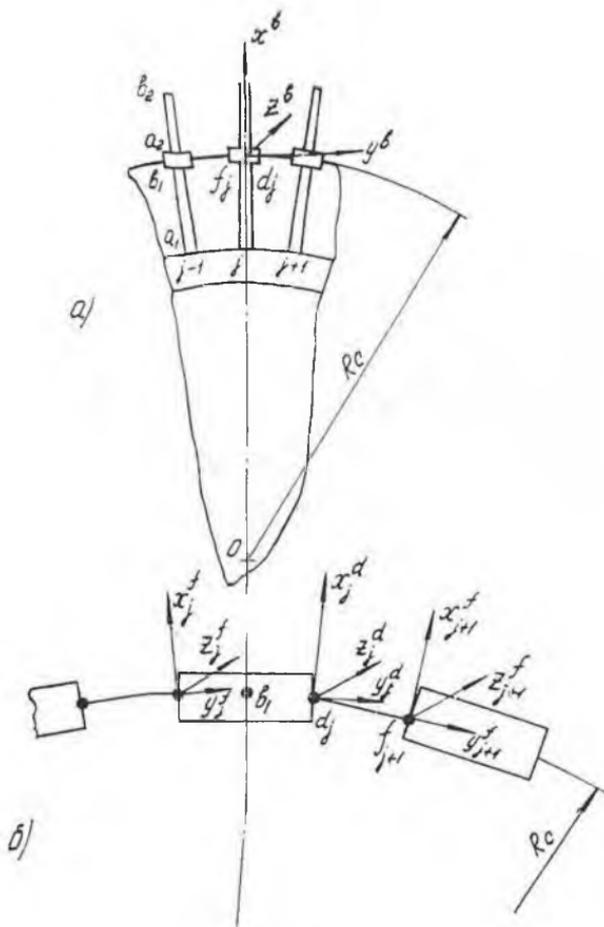


Рис. 2.

Предполагается, что эта упругая система обладает циклической симметрией с порядком, равным числу лопаток, т. е. все лопатки, расстояние между ними, крепление лопаток к диску и пояса связи к ним строго идентичны. Далее полагаем, что диск недеформируем в своей плоскости, а лопатки, имея прямую радиальную ось, недеформируемы вдоль нее. Предполагается также, что обод колеса, лопатки и пояс связи расположены симметрично относительно срединной плоскости диска, а лопатки представляют собой прямые стержни. При составлении расчетных уравнений не учитывается действие центробежных сил. Эти предположения являются обычными и позволяют изложить существо дела, не прибегая к громоздким построениям.

Воспользуемся методом волновых динамических жесткостей или методом волновых динамических податливостей. Для этого

расчленим данную упругую систему на следующие кольцевые элементы: 1) диск-обод; 2) внутреннюю лопаточную часть; 3) пояс связи; 4) внешнюю лопаточную часть.

По динамическим характеристикам каждого из этих элементов, составленных в местных системах координат, последовательно включая в систему каждый из них, найдем динамическую характеристику упругой системы. После этого нетрудно определить частоты и формы колебаний.

1. Динамические характеристики части системы «диск-обод»

Положим, что динамические характеристики этой части системы заданы в виде матрицы волновых динамических податливостей [4] \bar{F}_k^m на радиусе стыка этой части с внутренней лопаточной частью (точка a_1).

Линейная связь между комплексными амплитудами волн перемещений и комплексными амплитудами волн усилий в точках срединной плоскости на радиусе R_k может быть представлена в виде:

$$\begin{vmatrix} q_{zk} \\ \beta_{yk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11}^m & f_{12}^m \\ f_{21}^m & f_{22}^m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_{zk}^{1s} \\ M_{yk}' \end{vmatrix},$$

где q_{zk} и β_{yk} — амплитуды линейного и углового перемещения точек, расположенных на радиусе R_k , в направлении оси z и вокруг оси y соответственно;

Q_{zk}^{1s} и M_{yk}' — амплитуды усилия и момента, соответствующие перемещениям q_{zk} и β_{yk} .

Элементы матрицы

$$\bar{F}_k^m = \begin{vmatrix} f_{11}^m & f_{12}^m \\ f_{21}^m & f_{22}^m \end{vmatrix} \quad (1)$$

определяются по элементам матриц волновых динамических податливостей диска, учитывающих граничные условия в центральной части, и по элементам матриц динамических податливостей обода. И та и другая матрицы при помощи соответствующих матриц переноса [2] приводятся к радиусу R_k .

Имея в виду, что

$$Q_z^s = Q_{zk}^r - \frac{im}{R_k} M_{zk}',$$

образуем из квадратной матрицы второго порядка (1) матрицу волновых динамических жесткостей третьего порядка

$$\tilde{L}_k^m = \begin{vmatrix} f_{11}^m & f_{12}^m & -\frac{im}{R_k} f_{11}^m \\ f_{21}^m & f_{22}^m & -\frac{im}{R_k} f_{21}^m \\ \frac{im}{R_k} f_{11}^m & \frac{im}{R_k} f_{12}^m & \frac{m^2}{R_k^2} f_{11}^m \end{vmatrix},$$

которая свяжет между собой комплексные амплитуды волн перемещений и волн усилий на радиусе R_k , т. е.

$$\begin{vmatrix} q_{zk} \\ \beta_{yk} \\ \beta_{xk} \end{vmatrix} = \tilde{L}_k^m \begin{vmatrix} Q_{zk} \\ M'_{yk} \\ M'_{xk} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где β_{xk} — угловое перемещение вокруг оси x ;
 m — число волн деформаций;

Здесь матрица-столбец усилий соответствует комплексным амплитудам распределенных нагрузок. В дальнейшем, переходя к лопаткам, будем оперировать системами дискретных усилий. Поэтому выражение (2) приведем к виду

$$\begin{vmatrix} q_{zk} \\ \beta_{yk} \\ \beta_{xk} \end{vmatrix} = \tilde{\Pi}_k^m \begin{vmatrix} Q_{zk} \\ M_{yk} \\ M_{xk} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $\tilde{\Pi}_k^m = \tilde{L}_k^m \frac{S}{2\pi R_k}$, S — число лопаток. Матрица $\tilde{\Pi}_k^m$ подготов-

лена к стыковке с лопаточной частью и определяет волновые динамические характеристики системы «диск-обод» на радиусе R_k . Она устанавливает связь между комплексными амплитудами волн перемещений и волн дискретных усилий на радиусе R_k срединной поверхности обода. Эта матрица определяется для всех m , допускаемых порядком симметрии.

2. Динамические характеристики внутренней лопаточной части

Динамические характеристики любой из лопаток, например j , зададим в виде матрицы динамических жесткостей, устанавливающей связь между усилиями и перемещениями на границах ее стыка с ободом (точка a_1) и поясом связи (точка b_1). В общем случае эта матрица имеет двенадцатый порядок. Так как лопатка не деформируется вдоль своей оси, а диск не деформируется в своей плоскости, порядок фундаментальной матрицы лопатки пони-

жается за счет исключения строк и столбцов, соответствующих перемещениям $q_x^{a_1}$, $q_x^{a_1}$, $q_y^{a_1}$, $\beta_z^{a_1}$. Тогда усилия в точках a_1 и b_1 будут связаны с перемещениями соответствующих точек выражением:

$$\begin{pmatrix} -Q_{zj}^{a_1} \\ -M_{yj}^{a_1} \\ -M_{xj}^{a_1} \\ Q_{zj}^{b_1} \\ M_{yj}^{b_1} \\ Q_{yj}^{b_1} \\ M_{zj}^{b_1} \\ M_{xj}^{b_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{a_1 a_1} & C_{a_1 b_1} \\ \hline C_{b_1 a_1} & C_{b_1 b_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{zj}^{a_1} \\ \beta_{yj}^{a_1} \\ \beta_{xj}^{a_1} \\ q_{zj}^{b_1} \\ \beta_{yj}^{b_1} \\ q_{yj}^{b_1} \\ \beta_{zj}^{b_1} \\ \beta_{xj}^{b_1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

В выражении (4) усеченная фундаментальная матрица внутренней лопаточной части

$$\tilde{\Delta}^{(1)} = \left\| \begin{array}{c|c} C_{a_1 a_1} & C_{a_1 b_1} \\ \hline C_{b_1 a_1} & C_{b_1 b_1} \end{array} \right\|$$

будет составлена из следующих блоков:

$C_{a_1 a_1}$ — симметричной матрицы третьего порядка, которая определяет усилия в точке a_1 , вызывающие единичные перемещения этих точек в сечении a_1 . Перемещение точки b_1 при этом запрещено;

$C_{a_1 b_1}$ — прямоугольной матрицы, содержащей 3 строки и 5 столбцов и определяющей реакции в точке b_1 , вызываемые единичными перемещениями точки a_1 .

Матрицы $C_{b_1 b_1}$ и $C_{a_1 b_1}$ определяются аналогично по отношению к точке b_1 . Матрицы $C_{a_1 a_1}$, $C_{b_1 b_1}$ симметричны, а матрица $C_{b_1 a_1}$ взаимотранспонированная по отношению к матрице $C_{a_1 b_1}$, т. е. $C_{b_1 a_1} = C_{a_1 b_1}$.

Отметим, что фундаментальная матрица динамических жесткостей изолированной лопатки совпадает с фундаментальной матрицей волновых динамических жесткостей всей лопаточной части, т. е.

$$\Delta^{(1)} = \tilde{\Delta}^{(1)},$$

где $\tilde{\Delta}^{(1)}$ — волновая динамическая жесткость внутренней лопаточной части.

3. Динамические характеристики части системы, включающей в себя диск, обод и внутреннюю лопаточную часть

Располагая характеристиками отдельных элементов системы, определим ее динамические характеристики на радиусе R_c .

Обозначим матрицы-столбцы комплексных амплитуд усилий и перемещений на радиусах R_c и R_k :

$$Q_k^{a_1} = \begin{Bmatrix} Q_z^{a_1} \\ M_y^{a_1} \\ M_x^{a_1} \end{Bmatrix}; \quad Q_c^{b_1} = \begin{Bmatrix} Q_z^{b_1} \\ M_y^{b_1} \\ M_z^{b_1} \\ M_x^{b_1} \end{Bmatrix}; \quad q_k^{a_1} = \begin{Bmatrix} q_z^{a_1} \\ \beta_y^{a_1} \\ \beta_x^{a_1} \end{Bmatrix}; \quad q_c^{b_1} = \begin{Bmatrix} q_z^{b_1} \\ \beta_y^{b_1} \\ \beta_z^{b_1} \\ \beta_x^{b_1} \end{Bmatrix}.$$

Тогда выражение (4) можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} -Q_k^{a_1} \\ Q_c^{b_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{a_1 a_1} & C_{a_1 b_1} \\ C_{b_1 a_1} & C_{b_1 b_1} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} q_k^{a_1} \\ q_c^{b_1} \end{Bmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} -Q_k^{a_1} &= C_{a_1 a_1} q_k^{a_1} + C_{a_1 b_1} q_c^{b_1}; \\ Q_c^{b_1} &= C_{b_1 a_1} q_k^{a_1} + C_{b_1 b_1} q_c^{b_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя условия равновесия и совместности деформаций срединной поверхности обода и лопатки на радиусе их стыка (точка a), а также учитывая (3), после преобразований получим

$$q_k^{a_1} = - [I + \tilde{\Pi}_k^m C_{a_1 a_1}]^{-1} \tilde{\Pi}_k^m C_{a_1 b_1} q_c^{b_1}, \quad (6)$$

где $I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$ — единичная матрица.

Подставив выражение (6) во второе уравнение системы (5), найдем

$$Q_c^{b_1} = [C_{b_1 b_1} - C_{b_1 a_1} (I + \tilde{\Pi}_k^m C_{a_1 a_1})^{-1} \tilde{\Pi}_k^m C_{a_1 b_1}] q_c^{b_1}$$

или

$$Q_c^{b_1} = \bar{H}_c^m q_c^{b_1}, \quad (7)$$

где $\bar{H}_c^m = C_{b_1 b_1} - C_{b_1 a_1} (I + \tilde{\Pi}_k^m C_{a_1 a_1})^{-1} \tilde{\Pi}_k^m C_{a_1 b_1}$.

— матрица волновой динамической жесткости системы, включающей в себя диск, обод и лопаточную часть. Эта матрица, являясь самосопряженной, поскольку самосопряженной является матрица $\tilde{\Pi}_k^m$, имеет пятый порядок и определяет динамические характеристики части системы на радиусе стыка ее с поясом связи.

Для случая, когда лопатки на радиусе R_c свободны, положив $Q_c^{b_1} = 0$, получим уравнение частот $|\bar{H}_c^m| = 0$, которое в сочетании с (7) даст решение задачи для лопаточного венца со свободными лопатками. Если лопатки заделаны в абсолютно жестком диске, то $\tilde{\Pi}_k^m = 0$ и $H_c^m = C_{b_1 b_1}$.

4. Динамические характеристики части системы, включающей в себя диск, обод, внутреннюю лопаточную часть и пояс связи

Волновая динамическая жесткость пояса связи \widetilde{H}_n^m может быть также определена по фундаментальным матрицам. Не задавая поясу связи конкретной структуры, положим, что эта матрица \widetilde{H}_n^m на радиусе R_c известна и приведена к точке стыка с внутренней лопаточной частью (точка b_1). Являясь самосопряженной, она будет иметь пятый порядок. Волновая динамическая жесткость системы на радиусе R_c , включая и пояс связи, равна

$$\widetilde{H}_{c+n}^m = \widetilde{H}_c^m + \widetilde{H}_n^m. \quad (8)$$

Эта матрица устанавливает связь между комплексными амплитудами волн усилий и волн перемещений на радиусе R_c и определяется для всех m , допускаемых порядком симметрии системы, т. е.

$$Q_c = \widetilde{H}_{c+n}^m \cdot q_c. \quad (9)$$

5. Волновая динамическая жесткость системы, включающей диск, обод, внутреннюю лопаточную часть, пояс связи и внешнюю лопаточную часть $a^2 v^2$

Формулой (9) определяется волновая динамическая жесткость предшествующей части системы. Положим, что фундаментальная матрица внешней лопаточной части также известна и определяется выражением

$$\widetilde{\Delta}^{(2)} = \Delta^{(2)} = \left\| \begin{array}{c|c} C_{a_2 a_2} & C_{a_2 b_2} \\ \hline C_{b_2 a_2} & C_{b_2 b_2} \end{array} \right\|. \quad (10)$$

Блоки $C_{a_2 a_2}$, $C_{a_2 b_2}$, $C_{b_2 a_2}$, $C_{b_2 b_2}$, составляющие эту матрицу, являются квадратными матрицами пятого порядка.

Используя условия равновесия и совместности деформаций системы «диск-обод — внутренняя лопаточная часть — пояс связи» на радиусе R_c и внешней лопаточной части на этом же радиусе, определим волновую динамическую жесткость всей системы на ее наружном радиусе R_n

$$\widetilde{H}_n^m = C_{b_2 b_2} - C_{b_2 a_2} [C_{a_2 a_2} + \widetilde{H}_{c+n}^m]^{-1} C_{a_2 b_2}.$$

Таким образом, на внешнем радиусе упругой системы комплексные амплитуды волн усилий по соответствующим направлениям и комплексные амплитуды волн перемещений по тем же направлениям будут связаны между собой зависимостью

$$Q_n^{b_2} = \widetilde{H}_n^m q_n^{b_2}, \quad (11)$$

где

$$Q_{\Pi}^{b_2} = \begin{vmatrix} Q_z^{b_1} \\ M_y^{b_2} \\ Q_y^{b_2} \\ M_z^{b_2} \\ M_x^{b_2} \end{vmatrix}; \quad q_{\Pi}^{b_2} = \begin{vmatrix} q_z^{b_2} \\ \beta_y^{b_2} \\ q_y^{b_2} \\ \beta_z^{b_2} \\ \beta_x^{b_2} \end{vmatrix}.$$

Когда система совершает свободные колебания, то, полагая $Q_{\Pi}^{b_2} = 0$, получим уравнение частот

$$|\bar{H}_{\Pi}^m| = 0. \quad (12)$$

Для получения полного спектра частот этой системы уравнение (12) должно быть разрешено для всех m , допускаемых порядком симметрии.

После того, как найдены собственные частоты каждой из них, могут быть приведены в соответствие формы колебаний. Для этого, определив конкретные значения элементов матрицы волновых динамических жесткостей системы, соответствующих данной частоте, имея в виду, что $Q_{\beta_{2\Pi}} = 0$, из (11) получим систему однородных уравнений, решая которую, можно определить соотношение волн различных компонент и их относительный сдвиг в окружном направлении.

Из изложенного ясен путь решения задачи, когда система имеет несколько поясов связи.

В качестве одного из примеров рассмотрим лопаточный венец, в котором лопатки связаны между собой упруго-инерционным поясом связи (рис. 2, а). Этот пояс связи представляет собой круговое кольцо, состоящее из недеформируемых масс и упругих безынерционных стержней, соединяющих их между собой (рис. 2, б). Будем полагать, что массы пояса связи присоединяются к лопаткам в точках срединной плоскости (точки b_1) на радиусе R_c . Центры тяжести масс совпадают с точкой b_1 . Массы различных периодов сочленены между собой в точках d и f .

Динамические характеристики стержня, соединяющего массы, зададим фундаментальной матрицей в местных системах координат x^d, y^d, z^d и x^f, y^f, z^f с началом в точках d и f соответственно, то есть

$$\Delta_{df} = \left\| \begin{array}{c|c} D_{dd} & D_{df} \\ \hline D_{fd} & D_{ff} \end{array} \right\|,$$

где D_{dd} и D_{ff} — симметричные матрицы, определяющие усилия, которые вызывают единичные перемещения точек d и f при жестком креплении точек f и d соответственно;

D_{df} и D_{jd} — матрицы, определяющие реакции в точках d и f при соответственно жестком креплении этих точек и при действии усилий в точках f и d .

Матрицы D_{df} и D_{jd} взаимнотранспонированные, т. е.

$$D_{df} = D_{jd}^T.$$

Очевидно, что усилие на j -й массе, действующее со стороны j -го и $(j+1)$ -го стержней, будет:

$$\begin{aligned} -Q_j^d &= D_{dd} q_j^d + D_{df} q_{j+1}^f; \\ Q_j^f &= D_{fd} q_{j-1}^d + D_{ff} q_j^f, \end{aligned} \quad (13)$$

где q_j^d и q_j^f — матрицы-столбцы перемещений точек d и f j -го стержня;

q_{j-1}^d , q_{j+1}^f — матрицы-столбцы перемещений точек d и f $(j-1)$ -го и $(j+1)$ -го стержней.

Приведем усилия, действующие на i -ой массе в точках d и f , к точке b_i , а перемещения — к точкам b_i соответствующих периодов тела. Так как предполагается, что массы недеформируемы, то в пределах рассматриваемого элемента можно осуществить перенос усилий и перемещений из одной точки в другую, если воспользоваться матрицами переноса для усилий и перемещений [2]:

$$\begin{aligned} Q_j^d &= G_{db_i} Q_j^{b_i(d)}; & q_j^d &= R_{db_i} q_j^{b_i}; \\ Q_j^f &= G_{fb_i} Q_j^{b_i(f)}; & q_j^f &= R_{fb_i} q_j^{b_i}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь G_{db_i} и G_{fb_i} — матрицы переноса усилий в пределах недеформируемого тела из точек d и f соответственно в точку b_i ;

R_{db_i} и R_{fb_i} — матрицы переноса для перемещений в пределах того же тела.

Подставив (14) в (13), получим:

$$\begin{aligned} -Q_j^{b_i(d)} &= G_{db_i}^{-1} D_{dd} R_{db_i} q_j^{b_i} + G_{db_i}^{-1} D_{df} R_{fb_i} q_{j+1}^{b_i}; \\ Q_j^{b_i(f)} &= G_{fb_i}^{-1} D_{fd} R_{db_i} q_{j-1}^{b_i} + G_{fb_i}^{-1} D_{ff} R_{fb_i} q_j^{b_i}. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно [2]:

$$\begin{aligned} G_{db_i}^{-1} &= G_{b_i d}; & R_{db_i} &= G_{b_i d}^T; \\ G_{fb_i}^{-1} &= G_{b_i f}; & R_{fb_i} &= G_{b_i f}^T. \end{aligned}$$

Тогда выражение (15) примет вид:

$$\begin{aligned} -Q_j^{b_i(d)} &= G_{b_i d} D_{dd} G_{b_i d}^T q_j^{b_i} + G_{b_i d} D_{df} G_{b_i f}^T q_{j+1}^{b_i}; \\ Q_j^{b_i(f)} &= G_{b_i f} D_{fd} G_{b_i d}^T q_{j-1}^{b_i} + G_{b_i f} D_{ff} G_{b_i f}^T q_j^{b_i}. \end{aligned}$$

Помимо усилий $Q_j^{b_1(d)}$ и $Q_j^{b_1(f)}$ в точке b_1 будут действовать также усилия от сил инерции массы. Определив динамическую матрицу массы H_m в системе координат x^{b_1} , y^{b_1} , z^{b_1} , найдем

$$Q_{j_m}^{b_1} = H_m q_j^{b_1}.$$

Тогда, если к массе периода не приложены другие усилия,

$$Q_j^{b_1} = -Q_j^{b_1(d)} + Q_j^{b_1(f)} + Q_{j_m}^{b_1}$$

или

$$Q_j^{b_1} = [G_{b_1 d} D_{dd} G_{b_1 d}^T + G_{b_1 f} D_{ff} G_{b_1 f}^T + H_m] q_j^b + G_{b_1 d} D_{df} G_{b_1 f}^T q_{j+1}^{b_1} + G_{b_1 f} D_{fd} G_{b_1 d}^T q_{j-1}^{b_1}. \quad (16)$$

Используя общие свойства систем с циклической симметрией, полагаем, что:

$$\begin{aligned} Q_j^{b_1} &= Q^{b_1} e^{i \frac{2\pi}{S} m j}; \\ q_j^{b_1} &= q^{b_1} e^{i \frac{2\pi}{S} m j}; \\ q_{j+1}^{b_1} &= q^{b_1} e^{i \frac{2\pi}{S} m (j+1)}; \\ q_{j-1}^{b_1} &= q^{b_1} e^{i \frac{2\pi}{S} m (j-1)}, \end{aligned}$$

где Q^{b_1} и q^{b_1} — амплитудные значения обобщенных усилий и перемещений.

Подставив эти условия в (16), получим

$$Q^{b_1} = \left[D_{dd}^{b_1} + D_{ff}^{b_1} + H_m^{b_1} + (D_{df}^{b_1} + D_{fd}^{b_1}) \cos \frac{2\pi}{S} m + i (D_{df}^{b_1} - D_{fd}^{b_1}) \sin \frac{2\pi}{S} m \right] \cdot q^{b_1}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} D_{dd}^{b_1} &= G_{b_1 d} D_{dd} G_{b_1 d}^T; \\ D_{ff}^{b_1} &= G_{b_1 f} D_{ff} G_{b_1 f}^T; \\ D_{df}^{b_1} &= G_{b_1 d} D_{df} G_{b_1 f}^T; \\ D_{fd}^{b_1} &= G_{b_1 f} D_{fd} G_{b_1 d}^T. \end{aligned}$$

Отметим, что матрицы $D_{dd}^{b_1}$ и $D_{ff}^{b_1}$ симметричны, поскольку симметричны D_{dd} и D_{ff} . Матрицы $D_{df}^{b_1}$ и $D_{fd}^{b_1}$ взаимно транспонированные, так как $D_{df} = D_{fd}^T$. Обозначив

$$W^{b_1} = D_{dd}^{b_1} + D_{ff}^{b_1} + H_m^{b_1} + (D_{df}^{b_1} + D_{fd}^{b_1}) \cos \frac{2\pi}{S} m;$$

$$V^{b_1} = (D_{df}^{b_1} - D_{fd}^{b_1}) \sin \frac{2\pi}{S} m,$$

выражение (17) запишем в виде

$$Q^{b_1} = (W^{b_1} + iV^{b_1}) q^{b_1}.$$

Здесь матрица W^{b_1} симметрична, поскольку симметричны $D_{dd}^{b_1}$, $D_{ff}^{b_1}$, $H_m^{b_1}$. Симметричной является также и сумма взаимно транспонированных матриц $D_{df}^{b_1}$ и $D_{fd}^{b_1}$. Структура матрицы V^{b_1} такова, что ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны нулю, а элементы, расположенные относительно нее, равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, так как $D_{df}^T = D_{fd}$.

Отсюда следует, что в общем случае матрица $W^{b_1} + iV^{b_1}$ является эрмитовой.

Таким образом, $Q^{b_1} = \bar{H}_n^m q^{b_1}$,

где $\bar{H}_n^m = W^{b_1} + iV^{b_1}$ — матрица волновых динамических жестко-

стей упруго-инерционного пояса связи в точках b_1 , расположенных на радиусе R_c . Она устанавливает связь между комплексными амплитудами волн усилий и волн перемещений и определяется для всех m , допускаемых симметрией. После стыковки с лопаткой она будет иметь пятый порядок, так как перемещение вдоль оси лопатки запрещено.

Подставляя H_n^m в уравнение (8), используя (9), (11), (12), находят частоты и формы колебаний для всей упругой системы.

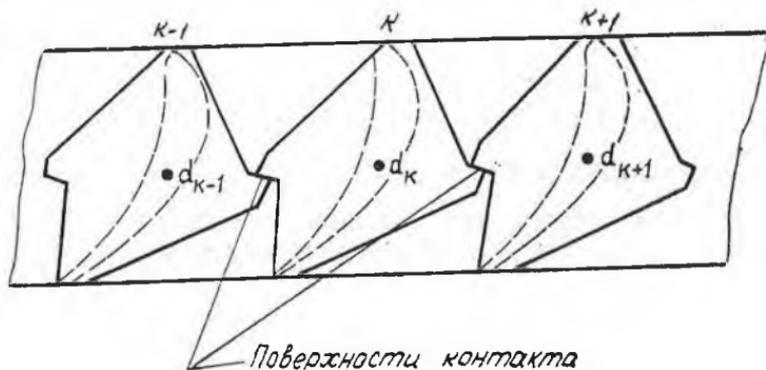


Рис. 3.

В качестве второго примера рассмотрим колебания лопаточного венца с лопатками, оснащенными бандажными полками, между которыми обеспечен натяг (рис. 3). Будем полагать, что в месте стыка полок (точке d) реализуется пространственный шарнир, допускающий в точке контакта свободные относительные смещения полок в радиальном направлении. Это возможно, так как линии контакта в большинстве случаев имеют малую длину.

в сравнении с шагом между лопатками, а реализовать полное прилегание по всей длине линии контакта практически трудно.

Эта схема не претендует на исчерпывающее описание сложного механизма явлений, которые могут происходить в местах стыка. Уточненное рассмотрение такой задачи приводит к необходимости нелинейной постановки ее, тем более, что принимается во внимание действие сил сухого трения. Общую систему координат выберем ту же, что на рис. 1.

Будем считать, что динамические характеристики части системы, расположенной до пояса связи, в точках a заданы в виде матрицы волновых динамических жесткостей. Будем считать также, что в эту часть системы включены и полки, но контакта между ними нет.

1. Кинематика и условия равновесия пояса связи. Положим, что центральный угол между лопатками мал и им можно пренебречь. В случае необходимости его можно учесть без особых затруднений. Полагаем также, что линейные смещения вдоль оси лопатки q_{zk} равны нулю. Угловые смещения различных периодов пояса связи β_{yk} и β_{zk} считаем независимыми. Линейные смещения q_{yh} при $m \neq 0$, полагаем отсутствующими. Как следует из рис. 2,

$$q_{z(k+1)} = q_{zk} + t_2 \sin \beta_{xk} + t_1 \sin \beta_{x(k+1)}$$

или, принимая углы β_{xk} малыми, получим

$$q_{z(k+1)} = q_{zk} + t_2 \beta_{xk} + t_1 \beta_{x(k+1)}. \quad (18)$$

На основе свойств системы с циклической симметрией положим:

$$\begin{aligned} q_{zk} &= q_z e^{i\alpha m k}; & \beta_{xk} &= \beta_x e^{i\alpha m k}; \\ q_{z(k+1)} &= q_z e^{i\alpha m (k+1)}; & \beta_{x(k+1)} &= \beta_x e^{i\alpha m (k+1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\alpha = \frac{2\pi}{S}$ — центральный угол между осями.

Определим связь между комплексными амплитудами линейных и угловых перемещений. Для этого подставим условия (19) в (18) и получим:

$$\beta_{xk} = f q_z, \quad (20)$$

$$f = \frac{e^{i\alpha m} - 1}{t_2 + t_1 e^{i\alpha m}}.$$

Если к K -тому периоду пояса связи в точке d_k приложены момент M'_{xk} и сила Q'_{xk} , то (рис. 4б) из условия равновесия следует:

$$P_{bk} + P_{ak} + Q'_{zk} = 0,$$

$$P_{bk}(t_1 + t_2) + Q'_{zk} \cdot t_1 + M'_{xk} = 0.$$

Так как

$$P_{ak} = -P_{b(k-1)},$$

$$P_{bk} = P_b e^{i\alpha mk}; \quad Q'_{zk} = Q'_z e^{i\alpha mk};$$

$$P_{b(k-1)} = P_b e^{i\alpha m(k-1)}; \quad M'_{xk} = M'_x e^{i\alpha mk},$$

то, исключив P_b , получим

$$Q'_z = -r M'_x. \quad (21)$$

Здесь

$$r = \frac{e^{-dmx} - 1}{t_2 + t_1 e^{-dmk}}.$$

Сопоставляя r и f , можно видеть, что они являются комплексно-сопряженными.

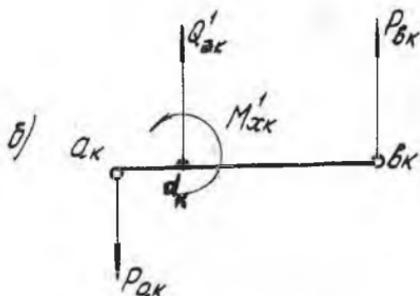
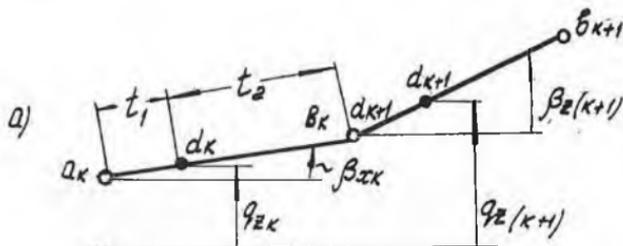


Рис. 4.

2. Условия сопряжения лопаточной части с поясом связи. Динамические характеристики части системы на радиусе R_c до включения пояса связи можно определить в виде

$$Q_c^b = \overline{H}_c^m q_c^b, \quad (22)$$

где

$$Q_c^b = \begin{Bmatrix} Q_z^b \\ M_y^b \\ M_z^b \\ M_x^b \end{Bmatrix}; \quad q_c^b = \begin{Bmatrix} q_z^b \\ \beta_y^b \\ \beta_z^b \\ \beta_x^b \end{Bmatrix};$$

$$\bar{H}_c^m = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}, \quad (23)$$

Матрицы-столбцы усилий Q_c^b , перемещений q_c^b и квадратная матрица волновых динамических жесткостей \bar{H}_c^m имеют, в отличие от (8), лишь четвертый порядок, так как предполагается, что после стыковки с поясом связи линейное перемещение q_z отсутствует (при $m \neq 0$).

Суммарные комплексные амплитуды сил и моментов, действующих в точках d_k , определяются из условий:

$$\begin{aligned} Q_z' &= Q_z - Q_z^b; \\ M_x' &= M_x - M_x^b, \end{aligned} \quad (24)$$

где Q_z и M_x — комплексные амплитуды волн внешних сил и моментов, приложенных к лопаточному венцу в точках d_k .

Используя (21), выражения (24) приведем к виду

$$Q_z + rM_x = Q_z^b + rM_x^b$$

или

$$Q_z^a = Q_z^b + rM_x^b. \quad (25)$$

В последнем уравнении Q_z^a представляет собой комплексную амплитуду волн внешних эквивалентных (обобщенных) сил.

Имея в виду (20) и (25), вместо (22) можно получить

$$\begin{vmatrix} Q_z^a \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{13}^* \\ c_{21}^* & c_{22}^* & c_{23}^* \\ c_{31}^* & c_{32}^* & c_{33}^* \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_z \\ \beta_y \\ \beta_x \end{vmatrix}.$$

В этом выражении квадратная матрица

$$(\bar{H}_c^m)^* = \begin{vmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{13}^* \\ c_{21}^* & c_{22}^* & c_{23}^* \\ c_{31}^* & c_{32}^* & c_{33}^* \end{vmatrix}. \quad (26)$$

является матрицей волновых динамических жесткостей системы на радиусе R_c с учетом пояса связи. Поскольку рассматриваемый пояс связи накладывает определенные кинематические ограничения на перемещения сечений лопаток, расположенных на радиусе R_c , то матрица (26) имеет более низкий порядок, чем матрица \bar{H}_c^m .

Элементы матрицы $(\bar{H}_c^m)^*$ могут быть выражены через элементы матрицы (23):

$$\begin{aligned} c_{11}^* &= c_{11} + frc_{44} + rc_{41} + fc_{14}; \\ c_{12}^* &= c_{12} + rc_{42}; \quad c_{22}^* = c_{22}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{13}^* &= c_{13} + rc_{43}; & c_{23}^* &= c_{23}; \\
 c_{21}^* &= c_{21} + fc_{24}; & c_{32}^* &= c_{32}; \\
 c_{31}^* &= c_{31} + fc_{34}; & c_{33}^* &= c_{33}.
 \end{aligned}$$

Матрица (26) — самосопряженная, так как r и f являются комплексно-сопряженными.

Если пояс связи расположен на периферийной части системы, то $Q_z^3 = M_y = M_z = 0$, и уравнение частот будет

$$|(\bar{H}_c^m)^*| = 0.$$

В дальнейшем, используя (9), (11), (12), находим весь спектр частот и соответствующие формы колебаний упругой системы в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Левин. Рабочие лопатки и диски первых турбин. Госэнергоиздат, М.-Л., 1953.
2. В. К. Дондошанский. Расчет колебаний упругих систем. «Машиностроение», М., 1965.
3. В. П. Иванов. Колебания лопаточного венца с упругими связями между лопатками. Труды КуАИ, вып. XXX, Куйбышев, 1967.
4. В. П. Иванов. Метод волновых динамических жесткостей и податливостей для расчета колебаний упругих систем, обладающих циклической симметрией. Труды КуАИ, вып. 52. Куйбышев, 1971.