КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
ТРУДЫ, ВЫПУСК XXX, 1967 г.
Вибрационная прочность и надежность двигателей
и систем летательных аппаратов

В. П. ИВАНОВ

КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОЧНОГО ВЕНЦА С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ МЕЖДУ ЛОПАТКАМИ

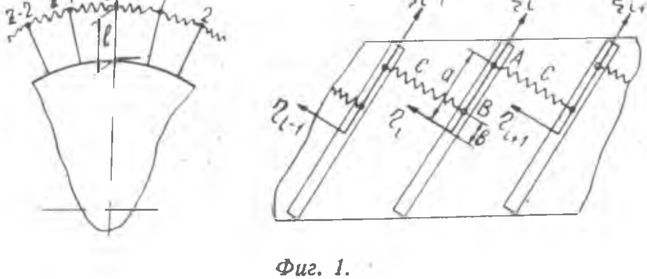
Между лопатками компрессоров и газовых турбин иногда устанавливают упругие связи. Расчет таких систем на колебания представляет определенный практический интерес, что нашло свое отражение в работах [1], [2] и др.

Настоящая статья посвящена расчету таких систем на основе общих вибрационных систем, обладающих циклической симметрией.

В работе [3] показано, что у стержневых систем, обладающих циклической симметрией, перемещения и силовые факторы, действующие в сходственных точках по сходственным направлениям на любых формах колебаний, распределяются в окружном направлении по гармоническому закону.

В [4] обращено внимание на то, что использование этого факта позволяет упростить задачу и свести ее к решению задачи о колебаниях периода структуры системы (одной лопатки) при специальных граничных условиях.

Ниже в качестве примера составлены расчетные уравнения для системы, представленной на фиг. 1а.



Фиг. 1.

Лопатки переменного сечения по высоте жестко защемлены в диске. Связи размещены на свободных концах лопаток (массой их и жесткостью на изгиб пренебрегаем). Естественная закрутка у лопаток отсутствует, центры тяжести и центры жесткости сечений лежат на общей прямой, совпадающей с радиусом. Координатные оси ξ и η расположены в центрах тяжести корневых сечений лопаток и направлены по их главным осям. Эти упрощения введены в целях более компактного изложения, составление расчетной схемы для более общего случая принципиальных затруднений не вызывает.

Вершина i-той лопатки может перемещаться в направлении оси η_i* и поворачиваться относительно оси лопатки. Перемещение точек A и B (фиг. 1б) в направлении оси η_i может быть представлено в виде

$$v_{i_A} = v_i + a\Theta_i \ ,$$

$$v_{i_B} = v_i + b\Theta_i \ ,$$

где v_i — перемещение центра тяжести концевого сечения;
Θ_i — поворот его.

Задав перемещения соседних лопаток, найдем усилия, приложенные к точкам A и B

$$\begin{aligned} P_{iA} &= c\,[v_i + a\Theta_i - v_{i+1} - b\Theta_{i+1}], \\ P_{iB} &= c\,[v_i + b\Theta_i - v_{i-1} - a\Theta_{i-1}], \end{aligned} \qquad (1)$$

где c — жесткость связи.

К вершине лопатки будет приложено усилие и момент:

$$P_i = p_{i_A} + p_{i_B}$$

$$M_i = ap_{iA} + bp_{iB}$$

или, учитывая (1.1),

$$\begin{aligned} P_i &= c\,[2v_i - v_{i-1} - v_{i+1} + (a + b)\Theta_i - a\Theta_{i-1} - b\Theta_{i+1}], \\ M_i &= c\,[(a^2 + b^2)\Theta_i - ab(\Theta_{i-1} + \Theta_{i+1}) + (a + b)v_i - \\ &\quad - bv_{i-1} - av_{i+1}]. \end{aligned} \qquad (2)$$

У систем с циклической симметрией на любых формах колебаний

$$\begin{aligned} v_{i-1} &= v\cos\alpha(i-1), & \Theta_{i-1} &= \Theta\cos\alpha(i-1-r), \\ v_i &= v\cos\alpha i, & \Theta_i &= \Theta\cos\alpha(i-r), \\ v_{i+1} &= v\cos\alpha(i+1), & \Theta_{i+1} &= \Theta\cos\alpha(i-1+r), \end{aligned} \qquad (3)$$

где v — амплитуда перемещений нулевой лопатки, имеющей максимум линейных перемещений;

* Возможностью колебаний в направлении оси ξ_i пренебрегаем.

Θ — амплитуда перемещений r-той лопатки, имеющей максимум угловых перемещений;

αr — относительный сдвиг волн линейных и угловых перемещений,

$$\alpha = \frac{2\pi}{z}\lambda;$$

z — число лопаток,

λ — число волн деформаций.

Полному спектру собственных движений соответствуют $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \frac{z}{2}$ при четном z и $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \frac{z-1}{2}$ при нечетном z. Подставляя (3) в (2), получим

$$P_i = c\{[2(1-\cos\alpha)v + (a+b)(1-\cos\alpha)\Theta\cos\alpha r + (a-b)\Theta\sin\alpha\sin\alpha r]\cos\alpha i + \Theta[(a+b)(1-\cos\alpha)\sin\alpha r - (a-b)\sin\alpha\cos\alpha r]\sin\alpha i\},$$

$$M_i = c\{[(a^2+b^2)(1-\cos\alpha)\Theta + (a+b)(1-\cos\alpha)v\cos\alpha r + (a-b)v\sin\alpha r]\cos\alpha(i-r) + v[-(a+b)(1-\cos\alpha)\sin\alpha r + (a-b)\sin\alpha\cos\alpha r]\sin\alpha(i-r)\}.$$

В этих выражениях коэффициенты при $\sin\alpha i$ и $\sin\alpha(i-r)$ равны нулю, поскольку сила P_i и момент M_i должны находиться в фазе с перемещением v_i и поворотом Θ_i.
Это определяет фазу αr

$$\operatorname{tg}\alpha r = \frac{a-b}{a+b}\,\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \tag{4}$$

и

$$P_i = c\,[2v + (a+b)\Theta\cos\alpha r\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha r)](1-\cos\alpha)\cos\alpha i$$

$$M_i = c\,[(a^2+b^2)\Theta + (a+b)v\cos\alpha r\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha r)](1-\cos\alpha)\cos\alpha(i-r) \tag{1.5}$$

При свободных колебаниях

$$v_i(x) = p^2K_{v_i}(x) + P_i N_v(x),$$

$$\Theta_i(x) = p^2K_{\Theta_i}(x) + M_i N_\Theta(x), \tag{5}$$

где $v_i(x)$, $\Theta_i(x)$ — функции прогибов и поворотов по высоте лопатки;

p — частота колебаний;

$$K_{v_i}(x) = \frac{\gamma}{g}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{EI_\xi(x)}\int_e^x\int_e^x F(x)v_i(x)\,dx^4;$$

$$K_{\Theta_i}(x) = \frac{\gamma}{g}\int_0^x \frac{1}{GI_k(x)}\int_L^x I_p(x)\Theta_i(x)\,dx^2;$$

$$N_v(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^x \frac{(\xi - l)}{EI_\xi(x)}\, dx^2;$$

$$N_\Theta(x) = \int\limits_l^x \frac{dx}{GI_k(x)};$$

где γ — весовая плотность материала лопатки;
l — длина лопатки;
$F(x)$ — площадь поперечного сечения лопатки;
$I_\xi(x)$ — момент инерции сечений лопатки относительно оси ξ;
E, G — модули упругости первого и второго рода материала лопатки;
$I_p(x)$ — полярный момент инерции сечений лопатки;
$I_k(x)$ — геометрическая характеристика жесткости сечений лопатки на кручение.

Исключив из выражений (2.1) P_i и M_i с помощью (1.5) и учтя (1.3), получим систему краевых интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned} v_i &= p^2\left\{K_v(x) + \sigma N_v(x)\,\frac{K_v(l)\,[2+\sigma N_\Theta(l)(\delta^2-2\mu)] + \delta K_\Theta(l)}{1-\sigma[2N_v(l)-\mu N_\Theta(l)]-\sigma^2 N_v(l) N_\Theta(l)[\delta^2-2\mu]}\right\} \\ \Theta_i &= p^2\left\{K_\Theta(x) + \sigma N_\Theta(x)\,\frac{K_\Theta(l)\,[\mu+\sigma N_v(l)\,[\delta^2-2\mu)] + \delta K_v\,[l]}{1-\sigma[2N_v(l)-\mu N_\Theta(l)]-\sigma^2 N_v(l) N_\Theta\,[\delta^2-2\mu]}\right\} \end{aligned}\right\},\qquad (262)$$

где $\sigma = c\,(1 - \cos\alpha)$;

$$\delta = (a + b)\cos\alpha r\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha r);$$

$$\mu = a^2 + b^2.$$

Решается эта система обычным способом [5]. Для каждого числа волн определяются свои значения $\alpha = \frac{2\pi}{z}\lambda$ и αr (144). Форма колебаний любой из лопаток, а значит и форма колебаний всей системы находится из

$$\begin{aligned} v_i(x) &= v(x)\cos\alpha i, \\ \Theta_i(x) &= \Theta(x)\cos\alpha(i - r). \end{aligned} \qquad (273)$$

Как следует из (27.3), формы колебаний различных лопаток на данной форме колебаний системы могут отличаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Левин. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. Госэнергоиздат, 1953.

2. В. К. Дондошанский. Расчет колебаний упругих систем. «Машиностроение», 1965.

3. Б. А. Смольников. Расчет свободных колебаний замкнутой рамной системы с циклической симметрией. Труды ЛПИ, № 210, 1960.

4. В. П. Иванов. О некоторых вибрационных свойствах упругих систем, обладающих циклической симметрией. Труды КуАИ, выпуск XXIX, 1966.

5. И. А. Биргер. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Оборонгиз, 1956.