

СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА МР И ИЗДЕЛИЙ ИЗ НЕГО

УДК 629.7

*В. Н. БУЗИЦКИЙ, Г. В. ЛАЗУТКИН,
А. Г. ПРИТУЛИН, Е. И. САЛАНОВ*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УПРУГО-ФРИКЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АМОРТИЗАТОРОВ ИЗ МАТЕРИАЛА МР

Упруго-фрикционные характеристики (УФХ) амортизаторов из материала МР при циклическом деформировании их упруго-демпфирующих элементов (УДЭ) получаются в виде семейств петель гистерезиса. В общем случае форма любой петли семейства зависит от амплитуды циклического деформирования A , предварительного натяга q УДЭ исследуемого амортизатора и знака скорости \dot{x} циклической деформации. Аналитически это записывается как

$$P = \begin{cases} \Phi_1(x; A; q) & \dot{x} > 0 & |x| \leq A \\ \Phi_2(x; A; q) & \dot{x} < 0 & |x| \leq A, \end{cases} \quad (1)$$

где P циклически меняющаяся сила, вызывающая деформацию x . Поставим задачу аппроксимировать зависимость P , получаемую экспериментально в виде множества точек, в классе алгебраических многочленов. Для этого зависимость P зададим совокупностью двух множеств процессов нагрузки ($\dot{x} > 0$) и разгрузки ($\dot{x} < 0$), представленных кусочно-линейными функциями (рис. 1), каждый s -й отрезок которых можно записать в форме

$$P_c^{(A)}(q_k) = P_i^{(A)}(q_k) + B_c^{(A)}(q_k)(x - x_i^{(A)}(q_k)); \quad \dot{x} > 0, \quad (2)$$

$$P_e^{(A_j)}(q_k) = P_i^{(A_j)}(q_k) + B^{(A_j)}(q_k)(x - x_i^{(A_j)}(q_k)); \quad \dot{x} < 0,$$

где $P_i^{(A_j)}(q_k)$, $P^{(A_j)}(q_k)$ ординаты точек петли с амплитудой деформации A_j при натяге q_k в абсциссе $x_i^{(A_j)}(q_k)$; при этом $A_j \in [A_0, A_n]$; $q_k \in [q_0, q_v]$; $j = 0, 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, 2, \dots, v$; $i = 0, 1, 2, \dots, s$, а

$$B_e = \frac{P_i^{(A_j)}(q_k) - P_{i+1}^{(A_j)}(q_k)}{x_i^{(A_j)}(q_k) - x_{i+1}^{(A_j)}(q_k)}.$$

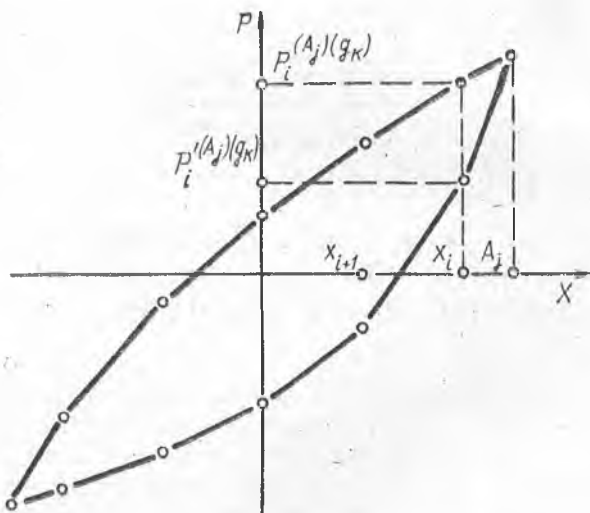


Рис. 1. Промежуточные приближения петель гистерезиса

Зафиксировав A_j и q_k , приблизим функцию $P^{(A_j)}(q_k)$, описывающую в данном случае петлю гистерезиса при j -й амплитуде и k -ом натяге, путем разложения ее по полиномам Чебышева степени m , дающего, как известно, достаточно хорошее приближение [1].

Для этого произведем в уравнении (1) замену переменной x на $\bar{x} = \frac{x}{A} = \cos \varphi_1$. В силу двухзначности функции $P^{(A_j)}(q_k)$ получим в результате тригонометрический ряд сумм четной и нечетной функций. Тогда введением новой переменной $\bar{y} = \cos \varphi_2$, где $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, функцию $P^{(A_j)}(q_k)$ можно описать только в

классе четных функций, но уже двух переменных $\bar{x} = \cos \varphi_1$ и $\bar{y} = \cos \varphi_2$. Это позволяет применять при разложении функции $P^{(A_j)}(q_k)$ полиномы Чебышева первого рода в виде

$$P^{(A_j)}(q_k) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2=0}^m P^{(A_j)}(q_k) \bar{x}^{\lambda_1} \bar{y}^{\lambda_2}, \quad (3)$$

причем коэффициенты $P_{\lambda_1 \lambda_2}^{(A_j)}(q_k)$ линейно зависят от коэффициентов $a_{\lambda_1 \lambda_2}^{(A_j)}(q_k)$ [2].

Отметим, что подобного типа задача решена в [2]. Однако в силу формальности введения \bar{x} в качестве второй переменной полученная в [2] полиномиальная модель двух переменных x и \bar{x} оказалась зависимой не только от знака скорости, но и от частоты циклического нагружения.

В нашем случае с учетом уравнения (2) имеем

$$a_{\lambda_1, 0}^{(A_j)}(q_k) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^s \int_{\varphi_{1,i}}^{\varphi_{1,i+1}} \left(P_c^{(A_j)}(q_k) + P_c'^{(A_j)}(q_k) \right) \cos \lambda_1 \varphi_1 d\varphi_1; \quad (4)$$

$$a_{\lambda_1, \lambda_2}^{(A_j)}(q_k) = \frac{4}{\lambda_2 \pi^2} \sin \frac{\lambda_2 \pi}{2} \sum_{i=0}^s \int_{\varphi_{1,i}}^{\varphi_{1,i+1}} \left(P_c^{(A_j)}(q_k) - P_c'^{(A_j)}(q_k) \right) \cos \lambda_1 \varphi_1 d\varphi_1, \quad (5)$$

где $\varphi_{1,i} \in [0, \pi]$; $\varphi_{1,i} = \arccos \bar{x}_i$; $\bar{x}_i \in [-1, 1]$;

причем для $m=3$:

$$P_{00}^{(A_j)}(q_k) = \frac{1}{4} \left(a_{00}^{(A_j)}(q_k) - 2a_{20}^{(A_j)}(q_k) \right);$$

$$P_{10}^{(A_j)}(q_k) = \frac{1}{2} \left(a_{10}^{(A_j)}(q_k) - 3a_{30}^{(A_j)}(q_k) \right);$$

$$P_{20}^{(A_j)}(q_k) = a_{20}^{(A_j)}(q_k); \quad P_{30}^{(A_j)}(q_k) = 2a_{30}^{(A_j)}(q_k); \quad P_{11}^{(A_j)}(q_k) = a_{11}^{(A_j)}(q_k);$$

$$P_{01}^{(A_j)}(q_k) = \frac{1}{2} \left(a_{01}^{(A_j)}(q_k) - 3a_{03}^{(A_j)}(q_k) - 2a_{21}^{(A_j)}(q_k) \right);$$

$$P_{03}^{(A_j)}(q_k) = 2a_{03}^{(A_j)}(q_k); \quad P_{21}^{(A_j)}(q_k) = 2a_{21}^{(A_j)}(q_k). \quad (6)$$

Перебирая все A_j по q_k , получим полиномиальную модель формы (3), в которой коэффициенты $P_{\lambda_1 \lambda_2}^{(A_j)}(q_k)$ задаются некоторым множеством. Аппроксимируем функцию $P_{\lambda_1 \lambda_2}^{(A_j)}(q_k)$ двух пере-

мелких A и q , заданную на этом множестве, с помощью полиномов Чебышева.

Как и ранее, зафиксируем одну переменную, например, q , и заменим в (1) A на $\bar{A} = \frac{2A - A_0 - A_n}{A_0 - A_n} = \cos \varphi$. Представим $P_{\lambda_1, \lambda_2}^{(q_k)}$ множеством кусочно линейных функций и, воспользовавшись соотношениями (4) и (6), заменив в них соответственно переменные и индексы, получим

$$P^{(q_k)} = \sum_{\lambda_1}^m \sum_{\lambda_2=0}^f \sum_{\lambda_3=0}^r p_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^{(q_k)} x^{-\lambda_1} y^{-\lambda_2} \bar{A}^{-\lambda_3}. \quad (7)$$

Далее, поступая аналогично с коэффициентами $p_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^{(q_k)}$, вводя переменную $\bar{q} = \frac{2q - q_0 - q_v}{q_0 - q_v}$, находим

$$P = \sum_{\lambda_1}^m \sum_{\lambda_2=0}^f \sum_{\lambda_3=0}^r p_{\lambda_1, \dots, \lambda_4} x^{-\lambda_1} y^{-\lambda_2} \bar{A}^{-\lambda_3} \bar{q}^{-\lambda_4}. \quad (8)$$

Возвращаясь к старым переменным x, A, q , учитывая, что $\bar{y} = \pm \sqrt{1 - x^2}$, окончательно имеем

$$P = \sum_{\lambda_1}^m \sum_{\lambda_2=0}^f \sum_{\lambda_3=0}^r p_{\lambda_1, \dots, \lambda_4}^* x^{\lambda_1} \sqrt{(A^2 - x^2)^{\lambda_2}} \left(A - \frac{A_0 + A_n}{2} \right)^{\lambda_3} \times \\ \times \left(q - \frac{q_0 + q_v}{2} \right)^{\lambda_4}, \quad (9)$$

причем

$$p_{\lambda_1, \dots, \lambda_4}^* = \frac{p_{\lambda_1, \dots, \lambda_4} \cdot 2^{\lambda_3 + \lambda_4}}{(A_0 - A_n)^{\lambda_3} A^{\lambda_1 + \lambda_2} (q - q_v)^{\lambda_4}}. \quad (10)$$

В качестве примера для амортизатора типа ДК-54 была получена полиномиальная модель в форме (9):

$$P = \sum_{\lambda_1}^3 \sum_{\lambda_2=0}^3 \sum_{\lambda_3=0}^1 \frac{p'_{\lambda_1, \dots, \lambda_4}}{A^{\lambda_1 + \lambda_2}} \cdot x^{\lambda_1} \sqrt{(A^2 - x^2)^{\lambda_2}} (A - 2,6)^{\lambda_3} q^{\lambda_4}. \quad (11)$$

Значения коэффициентов $p'_{\lambda_1, \dots, \lambda_4} \left[\frac{\text{кГ}}{\text{мм}^{\lambda_3 + \lambda_4}} \right]$ даны в таблице. Ошибка при такой аппроксимации, отнесенная к амплитудному значению силы, не превышает 0,02—0,05.

λ_1, λ_2

λ_3, λ_4	00	10	20	30	01	11	21	03
00	0,8130	17,6524	-1,0490	6,1719	15,8832	0,1271	-8,3219	-7,8100
01	-0,0368	-0,5155	0,2590	-0,2098	-0,2554	0,0495	0,0542	0,1529
10	0,1158	4,3246	-1,0803	1,3526	2,6541	-0,0280	-1,1517	-1,3679
11	-0,0569	-0,2637	0,1978	-0,0251	-0,0884	0,0451	0,0198	0,0597
20	-0,0377	-0,3094	-0,2272	-0,1414	-0,5676	-0,0363	0,3235	0,2592
21	-0,0088	-0,0139	0,0014	0,0189	-0,0017	0,0127	0,0062	-0,0064
30	0,0189	0,0528	0,0053	0,0640	0,1605	-0,0045	-0,0786	-0,0796
31	0,0067	0,0089	-0,0139	-0,0079	0,0012	0,0014	0,0065	-0,0021

На рис. 2, а, б приведены экспериментальные данные в виде точек, там же сплошной линией приведены расчетные зависимости, полученные на основе аппроксимации (11). Таким образом, рассмотренная математическая модель упруго-фрикционных характеристик амортизаторов из материала МР достаточно хорошо отображает реальные семейства петель гистерезиса и может быть использована для решения целого ряда динамических задач.

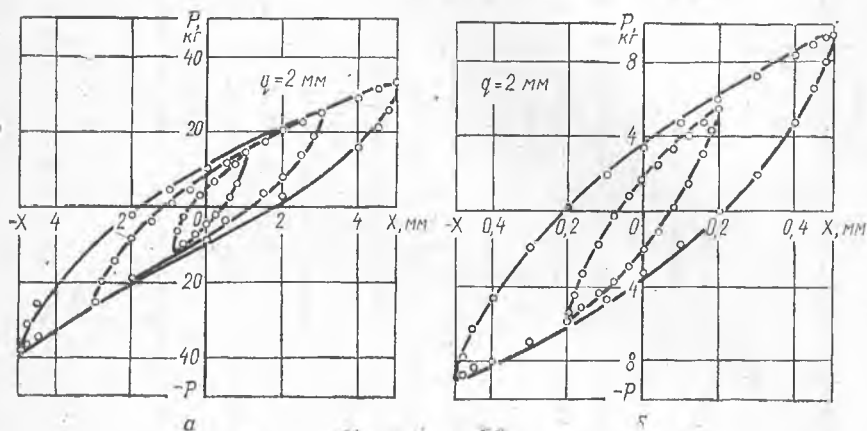


Рис. 2. Поле петель гистерезиса

В заключение отметим, что в силу идентичности характеристик тросовых, сетчатых, пластинчатых и других цельнометаллических амортизаторов можно рекомендовать модель в форме (9) для описания их упруго-фрикционных свойств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., 1959, т. I.
2. Мельников Г. И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. Л., 1975.
3. Бузицкий В. Н., Лазуткин Г. В. Исследования характеристик амортизаторов из материала МР.— В сб.: Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. Труды КуАИ, 1976, вып. 3.