КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ, ВЫПУСК XIX, 1965 г.
Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей

В. Н. БУЗИЦКИЙ, В. П. ИВАНОВ

О КОЛЕБАНИЯХ АМОРТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМ ЖЕСТКИМ ОГРАНИЧИТЕЛЕМ

Из практики амортизации известно, что большинство амортизирующих устройств в той или иной форме имеют ограничители перемещений. Эти ограничители предохраняют амортизаторы от разрушения при больших статических и ударных перегрузках; кроме того, введение их в некоторых случаях бывает необходимым средством ограничения амплитуд при переходе системы через резонанс.

Введение ограничителей делает систему существенно нелинейной. Это приводит к возникновению таких явлений, свойственных нелинейным системам, как «затягивание», «жесткий» характер возникновения некоторых движений, возможность появления субгармонических движений.

Описанный в ряде работ [1], [2] эффект «затягивания» является весьма нежелательным, т. к. расширяет зону опасных частот; возможность же появления субгармонических резонансов может сделать амортизатор вообще непригодным к эксплуатации.

Как правило, жесткость ограничителей значительно превышает жесткость амортизатора, поэтому выход колеблющейся системы на жесткие участки характеристики (включение ограничителей) можно рассматривать как удар, поскольку время контакта с ограничителями, как показывает анализ, весьма мало в сравнении с периодом действия возбуждающей силы.

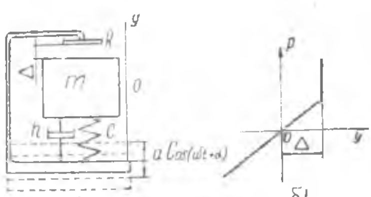
В связи с этим, есть основания для расчета амортизаторов с ограничителями использовать достаточно хорошо разработанный метод припасовывания, широко использовавшийся при расчете виброударных механизмов, [3], [4], [5], [6] и др. Отметим, что этот метод для определенной категории движений дает точное решение, тогда как метод эквивалентной линеаризации, использованный, в частности, в работах Иориша Ю. И. [1], является приближенным и при существенной нелинейности, приводящей к значительному отклонению закона движения от гармонического, не обеспечивает необходимой точности.

Обычно, при введении ограничителей стремятся обеспечить их симметричное расположение. Достичь этого практически не всегда представляется возможным, а необходимость в этом не очевидна. В самом деле, если жесткость симметричных ограничителей велика, то срыв с режима «затягивания», как показывает опыт, может происходить на весьма высоких частотах, в 7—10 раз превышающих резонансную частоту системы без ограничителей. Введение же одностороннего ограничителя в этом отношении кардинально меняет картину, и частота, до которой может происходить «затягивание», даже в случае абсолютно жесткого ограничителя и отсутствия рассеяния в системе, не может превышать более чем вдвое резонансную частоту системы без ограничителя.

Ниже рассматривается система, имеющая односторонний абсолютно жесткий ограничитель; учитывается рассеяние энергии на жестком участке характеристики — коэффициентом восстановления скорости при ударе, как это было сделано в работах [3], [4], [5] и др., а также и на упругом участке — сопротивлением, пропорциональным скорости.

В такой системе, как известно, возможна реализация различных типов периодических движений, качественный характер которых определяется двумя числами — i и j, где i — любое целое число, указывающее, во сколько раз период движения превышает период действия возбуждающей силы, а j — целое число, указывающее на число ударов за один период движения системы. Практический интерес представляют, как наиболее опасные, одноударные движения ($j=1$). Здесь рассматриваются также только одноударные движения.

Уравнение движения системы (фиг. 1) для одноударных движений может быть записано следующим образом:



Фиг. 1. Схема системы с односторонним ограничителем.

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = \frac{F}{m}\cos(\omega t + \alpha) -$$

$$- U(1+R)[\sigma_1(t) + \sigma_1(t-T) + \cdots], \quad (1)$$

где m — масса;

n — коэффициент затухания;

c — жесткость амортизатора;

$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — резонансная частота системы без рассеяния;

F — амплитуда гармонической возбуждающей силы;

ω — частота возбуждающей силы;

α — фаза возбуждающей силы, отсчитываемая от момента удара;

U — скорость системы в момент времени, предшествующий удару;
R — коэффициент восстановления скорости при ударе;
$\sigma_1(t)$, $\sigma_1(t-T)$ — импульсные функции первого рода;
T — период движения.

Движение в промежутке между ударами об ограничитель складывается из вынужденного движения под действием гармонической возбуждающей силы и свободного движения.

Рассматриваем периодические движения, которым должны соответствовать вполне определенные начальные условия — скорость в момент, предшествующий удару, фаза возбуждающей силы, отсчитываемая от момента удара, и перемещение, определяемое в данном случае величиной зазора. Неизвестными являются скорость удара и фаза.

Переходя к относительным величинам, определяем одно из начальных условий — скорость в момент, предшествующий удару

$$\overline{U} = -\frac{2}{\Theta(1+R)(1+B)}\left[\overline{\Delta} \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \overline{\Delta}^2\right)B}\right], \qquad (2)$$

где $\overline{U} = \dfrac{U}{\frac{F}{mk}}$ — относительная скорость удара;

$\overline{\Delta} = \dfrac{\Delta}{\frac{F}{mk^2}}$ — относительный зазор;

$\lambda = \sqrt{(1-\xi^2)^2 + 4\delta^2\xi^2}$;

$\delta = \dfrac{n}{k}$ — коэффициент демпфирования;

$\xi = \dfrac{\omega}{k}$ — относительная частота возбуждения;

$$\Theta = \frac{2e^{2\pi i\frac{\delta}{\xi}} \sin 2\pi i \dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\xi}}{\sqrt{1-\delta^2}\left(1 + e^{4\pi i\frac{\delta}{\xi}} - 2e^{2\pi i\frac{\delta}{\xi}} \cos 2\pi i \dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\xi}\right)};$$

$$B = \left(\frac{2}{1+R} - \psi - \delta\Theta\right)^2 \frac{1}{\xi^2\Theta^2};$$

$$\psi = 2\,\frac{1 - e^{2\pi i\frac{\delta}{\xi}} \cos 2\pi i \dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\xi}}{1 + e^{4\pi i\frac{\delta}{\xi}} - 2e^{2\pi i\frac{\delta}{\xi}} \cos 2\pi i \dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\xi}}.$$

Фаза возбуждающей силы может быть определена из

$$\sin\alpha = 2\overline{\Delta}\delta\xi - \frac{\overline{U}(1-\xi^2)}{\Im} + \frac{\overline{U}(1+R)}{\xi\sqrt{1-\delta^2}}\,\frac{\psi}{2}\left[\sqrt{1-\delta^2}(1-\xi^2) + \delta\Phi(1+\xi^2)\right] \quad (3)$$

и

$$\cos\alpha = \bar{\Delta}(1-\xi^2) + 2\bar{U}\delta - \frac{\bar{U}(1+R)}{\sqrt{1-\delta^2}}\,\frac{\psi}{2}\left[(2\delta^2 - 1 + \xi^2)\,\Phi + 2\delta\sqrt{1-\delta^2}\right],$$

где

$$\Phi = \frac{e^{2\pi i\frac{\delta}{\xi}} \sin 2\pi i \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\xi}}{1 - e^{2\pi i\frac{\delta}{\xi}} \cos 2\pi i \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\xi}}.$$

Заметим также, что одноударные периодические движения могут иметь период, равный или кратный периоду действия возбуждающей силы

$$T = T_F\, i,$$

где $T_F = \frac{2\pi}{\omega}$ — период действия возбуждающей силы,

$i = 1,\ 2,\ 3\ldots$

Реально возможны только те периодические движения, которым соответствуют положительные и вещественные значения скорости удара.

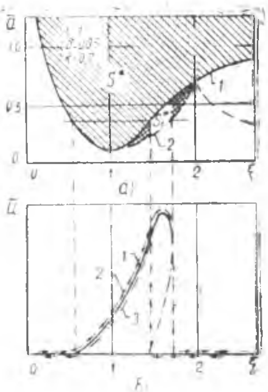
Анализируя выражение (2) для скорости удара, можно определить области положительных и вещественных значений скорости.

Для $i=1$ (основное движение) характер расположения областей положительности и вещественности для определенных δ и R показан на фиг. 2. В области S^*, выше границы положительности, возможно существование только одного вида периодического движения — выражение (2) имеет один положительный и вещественный корень. В области S_1^{**}, заключенной между границами положительности и вещественности, выражение (2) имеет два положительных корня и возможно существование двух различных движений. На фиг. 2б показана зависимость скорости удара (положительных и вещественных корней выражения (2) от частоты при заданном $\bar{a} = \frac{a}{\Delta}$, δ и R. В реальных условиях всегда $\bar{a} < 1$; ниже все рассуждения соответствуют этому случаю. Анализ показывает, что в области двузначности скорости нижняя ветвь соответствует неустойчивым движениям. Здесь же, на фиг. 2б, показан характер изменения скорости удара при увеличении и уменьшении частоты.

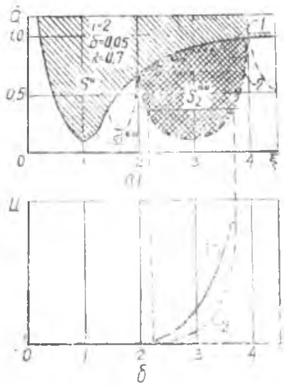
Для $i=2,\ 3,\ \ldots$ (субгармонические движения) также могут быть определены области положительности и вещественности скорости удара и, соответственно, сами значения скорости. На фиг. 3 показаны эти области для $i=2$. Область положительности (для любых i) остается той же самой — S^*;

в пределах же частот от $\xi=1$ до $\xi=\infty$ уже будут иметь место две области, в которых скорость принимает два положительных значения — области δ^{**} и S_2^{**}. Однако, движения, соответствующие области δ^{**} реализоваться не могут, поскольку эти движения связаны с заходом массы за плоскость ограничителя, и здесь реализуются движения $i=1$.

В области же S_2^{**} возможно появление субгармонического движения $i=2$. Для того, чтобы это движение возникло, нужно либо создать специальные начальные условия, либо перейти из области S^* плавным изменением ξ и $\bar{a}$.



Фиг. 2. Расположение областей положительности и вещественности скорости удара для $i=1$ (*а*) и зависимость скорости удара от частоты (*б*).



Фиг. 3. Расположение областей положительности и вещественности скорости удара для $i=2$ (*а*) и зависимость скорости удара от частоты (*б*).

Аналогичная картина наблюдается и для других i. В тех областях, где имеют место два положительных и вещественных значения корней выражения (2), но расположенных на частотах $\xi<1$, движения, соответствующие данному i реализоваться не могут. Следовательно, кождому i может реально соответствовать только одна область S_i^{**} расположенная на частотах $\xi>1$ (для $i=2$ эта область расположена в диапазоне $2<\xi<4$, для $i=3$ — в диапазоне $3<\xi<6$ и т. д.).

Отметим характерную особенность, свойственную системам с резким изломом характеристики упругости — появление субгармонических движений при заданной интенсивности возбуждения ($\bar{a}$) если и возможно, то только при специальных начальных условиях.

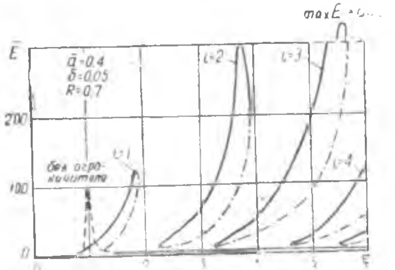
Поскольку принято при анализе вынужденных колебаний тех или иных систем строить резонансные кривые в виде зависимости «амплитуда-частота», представляет интерес построение резонансной кривой и для данной системы. Однако для существенно нелинейной системы понятие амплитуды теряет смысл, так как закон движения сильно отличается от гармонического. Напряженность режима колебаний системы может характеризоваться максимальным отклонением ее от положения равновесия, но и это не всегда приемлемо, как например в случае с двухсторонним ограничителем. Очевидно, наиболее правильно характеризовать степень опасности движения значением полной энергии системы. В то же время, в нелинейной системе, вообще говоря, за период движения полная энергия может изменяться. В частности, в рассматриваемом случае полная энергия будет достигать максимума в момент времени, предшествующий удару. Поэтому для оценки степени опасности того или иного движения строим резонансные кривые в виде зависимости полной энергии системы в момент, предшествующий удару, от частоты.

Полная энергия может быть определена, как

$$E = \frac{c\Delta^2}{2} + \frac{mU^2}{2},$$

или, в относительных величинах $\overline{E} = (\overline{\Delta}^2 + \overline{U}^2)\overline{F}^2$, где обозначено

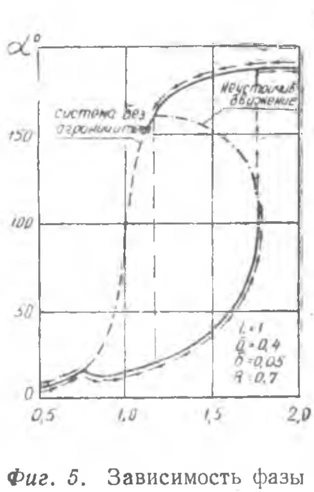
$$\overline{E} = \frac{E}{\frac{ca^2}{2}} \quad \text{и} \quad \overline{F} = \frac{F}{mak^2}.$$



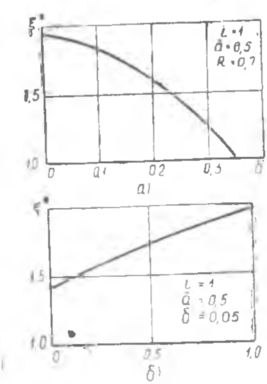
Фиг 4. Зависимость полной энергии от частоты.

На фиг. 4 представлена зависимость полной энергии от частоты при заданных $\overline{a}$, δ и R и различных i; на фиг. 5 — фазы возбуждающей силы, отсчитываемой от момента удара.

Для оценки области применения и работоспособности амортизатора с ограничителем важным моментом является определение



Фиг. 5. Зависимость фазы удара от частоты.



Фиг. 6. Влияние коэффициента демпфирования (a) и коэффициента восстановления скорости при ударе ($б$) на частоту срыва системы.

частот, до которых возможно «затягивание» при основном движении ($i=1$), и условий, при которых возможно появление субгармонических движений.

Как показывает анализ, в случае одностороннего жесткого ограничителя «затягивание» даже при отсутствии демпфирования ($\delta=0$, $R=1$) не может превышать резонансную частоту более, чем в два раза. Введение демпфирования ($\delta>0$, $R<1$) уменьшает «затягивание» — срыв системы с ударного режима работы происходит при частотах, меньших, чем $\xi=2$. На фиг. 6 показано влияние демпфирования на частоту срыва ξ^* ($i=1$).

С другой стороны, при основном движении полная энергия системы без демпфирования может достигать сколь угодно больших значений (на частоте $\xi=2$). Введение демпфирования ограничивает рост полной энергии в системе — чем больше демпфирование, тем меньше максимальное значение полной энергии.

Таким образом, введение рассеяния в рассматриваемую систему, с одной стороны, сужает диапазон опасных частот (при $i=1$) и, с другой стороны, как и следовало ожидать, ограничивает интенсивность движений.

Возможность появления субгармонических движений при любом $\bar{a}<1$ зависит от демпфирования в системе (от δ и R). Чем больше δ и меньше R, тем при больших значениях $\bar{a}$ исключается возможность появления субгармонических движений. Если величина $\bar{a}$ такова, что на отрезке ξ от 2 до ∞ мы не попадаем в области S^{**}, соответствующие различным i (см. например фиг. 3), то возможность появления субгармонических движений будет исключена. Увеличение δ и уменьшение R поднимает эти области. Однако, необходимо заметить, что в том случае, если амплитуда вибросмещения основания при изменении частоты сохраняется постоянной ($\bar{a}=\text{const}$; амплитуда возбуждающей силы пропорциональна квадрату частоты), то минимумы кривых, ограничивающих области S^{**} практически для всех i находятся примерно на одном уровне с минимумом области положительности. Это означает, что для исключения возможности появления субгармонических резонансов необходимо обеспечивать такое рассеяние при заданных амплитуде вибросмещения и зазоре Δ, при которых выход на жестокий участок характеристики вообще был бы исключен на любой частоте, включая резонансную частоту.

Из практики же известно, что с увеличением частоты амплитуда вибраций основания $\bar{a}$ падает. В технических условиях на испытание амортизаторов обычно задается, что амплитуда вибросмещения меняется обратно пропорционально частоте (амплитуда возбуждающей силы пропорциональна частоте).

В этом случае, даже выходя на жесткий участок характеристики при основном движении ($i=1$), в связи с падением амплитуд вибросмещения по частоте, попадание в области S^{**} может быть исключено, если обеспечено соответствующее демпфирование на упругом участке характеристики. Тем более это проще обеспечить в случае постоянства амплитуды возбуждающей силы по частоте. Таким образом, появляются условия исключения возможности появления субгармонических резонансов при использовании ограничителя, как средства облегчения перехода через основной резонанс.

Необходимо отметить, что введение рассеяния только на жестком участке характеристики (при ударе) не исключает возможности появления субгармонических резонансов при любом законе изменения амплитуд по частоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. И. Иориш*, Защита самолетного оборудования от вибраций, Оборонгиз, 1949.

2. *В. И. Konычев*, Амортизаторы самолетного оборудования, Оборонгиз, 1956.

3. *И. Г. Русаков, А. А. Харкевич*, Вынужденные колебания системы, ударяющейся об ограничитель, ЖТФ, т. XII, вып. 11—12, 1942.

4. *Д. Д. Баркан, О. Я. Шехтер*, К теории вынужденных колебаний вибратора с ограничителем, ЖТФ, т. XXV, вып. 13, 1955.

5. *С. А. Цаплин*, Виброударные механизмы, Автотрансиздат, 1953.

6. *Л. В. Беспалова*, К теории виброударного механизма, Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1957.