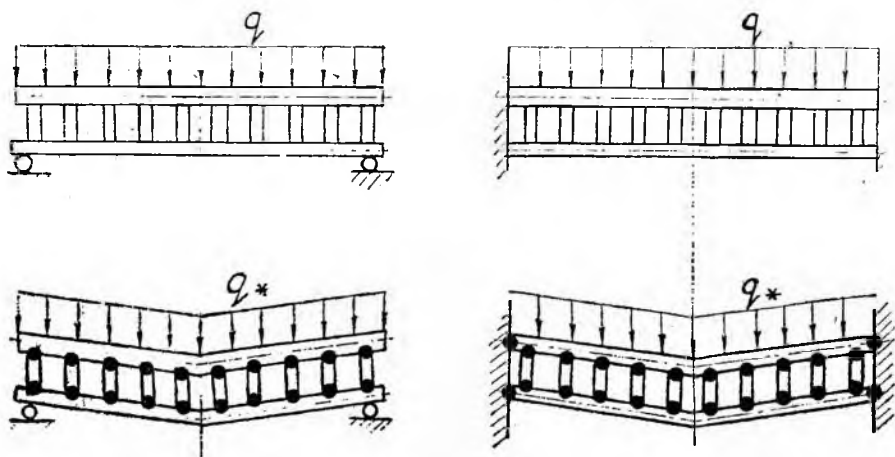


В. Н. АЛЬПЕРТ, Я. Б. МАРКМАН

О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРУБЧАТЫМИ СВЯЗЯМИ

Двухслойные круглые пластины с трубчатыми связями применяются в форсуночных головках и в теплообменных аппаратах в качестве силового элемента, воспринимающего перепад давления.

В работе [4] кинематическим методом решена задача о несущей способности двухслойной круглой пластины из жестко-пла-



Фиг. 1. Схемы предельного равновесия

стического материала с жесткими точечными связями и получены верхние оценки для предельного давления с учетом перфорации составляющих пластин. Та же задача с учетом изменения предела текучести от стационарного переменного по радиусу поля температур решена в работе [5].

Результаты, полученные на базе гипотез жесткой нормали для двухслойной пластины в целом, можно рассматривать как верхние оценки предельного давления и для двухслойной пластины со стержневыми (трубчатыми) связями, однако в этом случае следует учесть возможность достижения предельного состояния с образованием пластических шарниров в связях. Наиболее простые из кинематически возможных схем такого типа показаны на фиг. 1. Радиальные перемещения в срединных плоскостях составляющих пластин отсутствуют, а связи считаются жесткими в направлении нормали к пластинам, т. е. скорости прогиба $\omega(r)$ одинаковы для обеих составляющих пластин и скорости поворота в пластических шарнирах связей равны $\frac{d\omega(r)}{dr}$. В указанных схемах задача сводится, по существу, к предельному равновесию перфорированных составляющих пластин, изгибаемых давлением (п. 1), и к предельному равновесию консольной (ввиду симметрии) короткой трубки при изгибе поперечной силой (п. 2).

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РАВНОМЕРНО ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

Влияние перфорации на несущую способность круглых пластин из жестко-пластического материала, подчиняющегося условию текучести Треска и ассоциированному закону течения, впервые оценивалось в работе [4] кинематическим методом, исходя из предположения, что диссипация энергии не меняется по сравнению со сплошной пластиной во всем объеме за вычетом отверстий. Полученные верхние оценки для предельного давления применимы к любой сетке перфорации, однако являются весьма грубыми при относительно больших отверстиях ($d > 0,6 \div 0,7$; d и b — диаметр и шаг расположения отверстий), так как не выполняется очевидное условие, при котором $q \rightarrow 0$ при $\frac{d}{b} \rightarrow 1$.

В работе [3] для оценки несущей способности равномерно перфорированных пластин было принято, что пластические шарниры образуются только в перемычках между отверстиями, а элементы, ограниченные перемычками и контурами отверстий, остаются жесткими. В результате получены следующие верхние оценки для предельного давления, действующего на всю поверхность, включая отверстия:

а) край оперт:

$$q_* = 6 \frac{a}{b} \frac{M_s}{R^2}, \quad (1)$$

б) край зашцеилен:

$$q_* = \frac{6M_s}{R^2} \cdot \frac{2\lambda^2 \left[\frac{a}{b} \cdot \left(1 + \frac{4}{\pi} \cdot \ln \lambda \right) + \frac{ak}{bk} \right]}{3\lambda^2 - 1}. \quad (2)$$

Здесь a — ширина перемычек между отверстиями, b — шаг; a_k и b_k — то же для отверстий периферийного ряда, центры которых расположены на краевой окружности радиуса R ; $M_s = \frac{1}{4} \sigma_s h^2$, σ_s — предел текучести; h — толщина пластины; λ определяется из трансцендентного уравнения

$$3\lambda^2 - \ln \lambda^2 - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{a_k b}{a b_k} \right) - 1 = 0. \quad (3)$$

Допустимо пользоваться формулой (2) и при фиксированном $\lambda = 1,37$, соответствующем сплошной пластине. Тогда

$$q_* = 4,87 \left(1,4 \frac{a}{b} + \frac{a_k}{b_k} \right) \frac{M_s}{R^2}. \quad (4)$$

Если давление действует только на поверхность, не занятую отверстиями, то q_* для равномерно перфорированной пластины увеличивается в $\frac{F}{F-F_0}$ раз, где F — площадь сплошной пластины, F_0 — суммарная площадь отверстий.

У перфорированной пластины с заземленным краем предельное состояние может возникнуть также при образовании пластических шарниров по сторонам и диагоналям любого многоугольника, проходящего через центры отверстий. Например, при «сотвом» (по вершинам правильных треугольников) расположении отверстий вписанному в круг шестиугольнику соответствует

$$q_* = 16 \frac{a M_s}{b R^2}. \quad (5)$$

В действительности реализуется то предельное состояние, которое соответствует меньшему q_* .

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ КОРОТКОЙ ТРУБКИ ПРИ ИЗГИБЕ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ

Общее решение задачи о предельном равновесии тонкостенной трубы под действием сил, приложенных по ее концам, дано Гвоздевым А. А. [1].

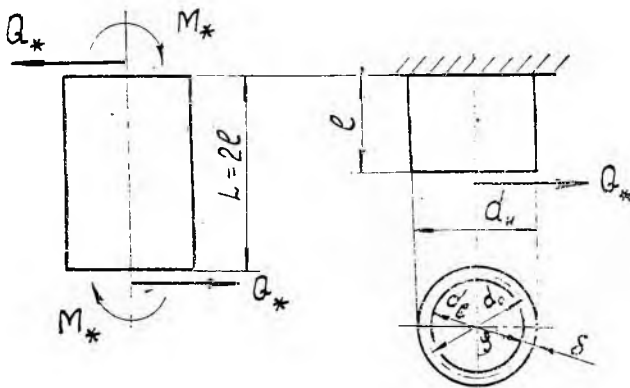
Ниже приведено несколько иное решение частной задачи для короткой консольной трубки, нагруженной на конце поперечной силой (фиг. 2), к которой сводится, ввиду симметрии, предельное равновесие трубчатой связи.

Предельное состояние возникает только в закрепленном сечении при одновременном действии перерезывающей силы Q и изгибающего момента $M = Q l$. Определим для кольцевого сечения зависимость предельного момента M_* от фиксированного значения силы Q_* , исходя из условия постоянства интенсивности напряжений $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2$.

Так как для тонкой стенки профиля поток касательных напряжений параллелен срединной линии, то в данном случае

$$M = hd_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma(\tau) \cos \tau d\tau = hd_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2} \cos \tau d\tau, \quad (6)$$

$$Q = 2hd_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$



Фиг. 2. Равновесие связи в предельном состоянии

Решению задачи об условном экстремуме соответствует максимум функции

$$\Phi(\tau, \lambda) = d_0 \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2} - 2\lambda \tau \sin \tau,$$

т. е. условие

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = -\frac{3d_0 \tau \cos \tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} - 2\lambda \sin \tau = 0, \quad (7)$$

где λ — постоянная величина.

Из уравнения (7) и условия текучести находим

$$\tau = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\psi^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \sigma = \sigma_s \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}. \quad (8)$$

Здесь $\psi = d_0 \frac{\sqrt{3}}{2\lambda}$ — новая постоянная, которую можно рассматривать как параметр.

Подставляя (8) в (6), получим

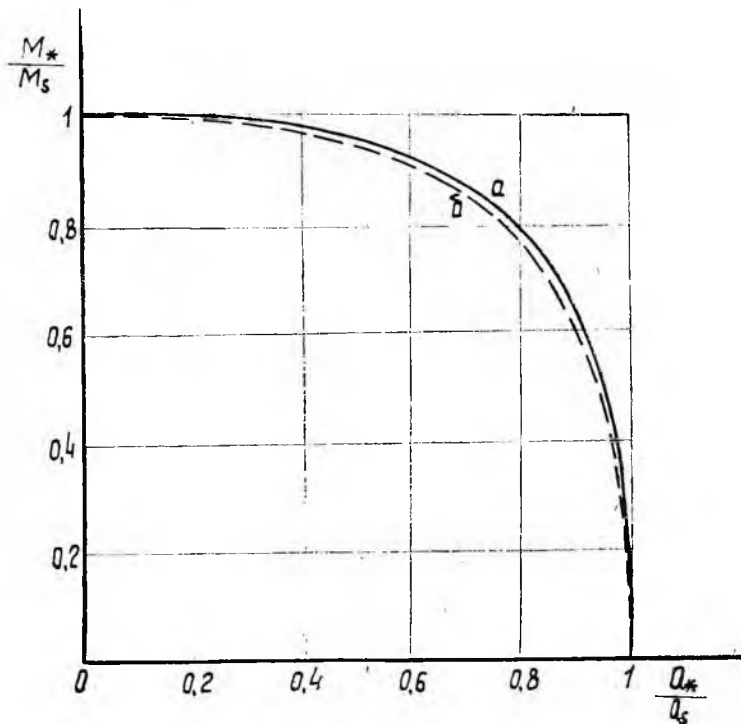
$$M_* = hd_0^2 \sigma_s \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\psi^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad Q_* = 2hd_0 \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\sqrt{\psi^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}. \quad (9)$$

Эти формулы можно преобразовать к виду

$$\frac{M_*}{M_s} = I(\phi), \quad \frac{Q_*}{Q_s} = I\left(\frac{1}{\psi}\right), \quad (10)$$

где $M_s = hd_0^2 \sigma_s$ и $Q_s = 2hd_0 \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ — предельные значения изгибающего момента и поперечной силы при их независимом действии на кольцевое сечение,

$$I(\phi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\psi^2 + \tan^2 \varphi}} \quad \text{— функция параметра } \phi.$$



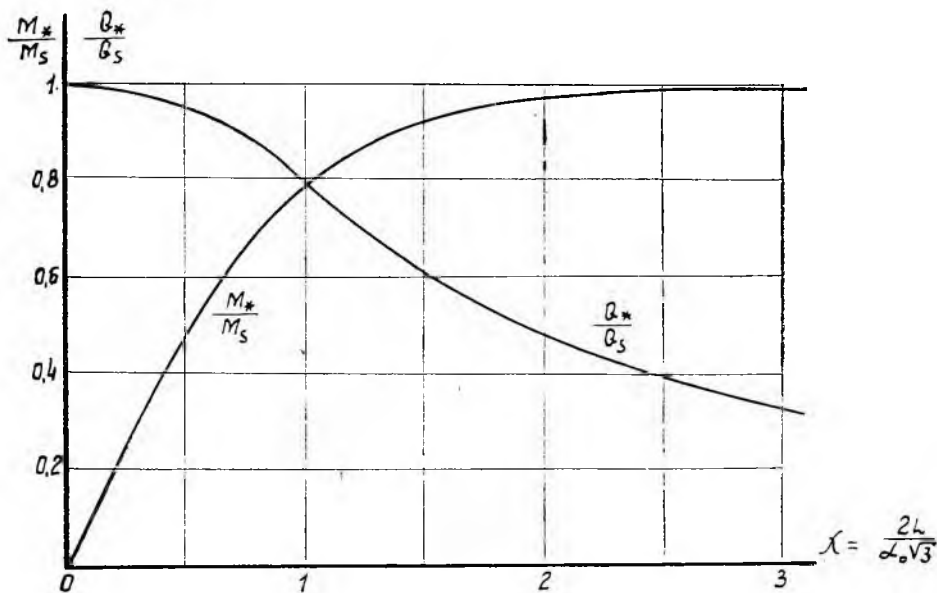
Фиг. 3. Диаграммы предельного состояния

Формулы (10) следует рассматривать как параметрическое уравнение предельного состояния при совместном действии изгибающего момента и поперечной силы; соответствующая кривая показана на фиг. 3. Нетрудно убедиться, что во всем диапазоне она близка к более простой кривой $\left(\frac{M_*}{M_s}\right)^3 + \left(\frac{Q_*}{Q_s}\right)^3 = 1$.

Используя последнее уравнение как уравнение предельного состояния и подставляя в него очевидное условие $M_* = Q_*l$, получим

$$M_* = \frac{\chi M_s}{\sqrt[3]{1 + \chi^3}}, \quad Q_* = \frac{Q_s}{\sqrt[3]{1 + \chi^3}}, \quad (11)$$

где $\chi = \frac{2l}{d_0 \sqrt[3]{3}}$



Фиг. 4. Предельные значения изгибающего момента и предыдущей силы

Эти функции приближенно определяют взаимное влияние предельных значений M_* и Q_* в зависимости от параметра χ (фиг. 4).

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРУБЧАТЫМИ СВЯЗЯМИ

Нагрузка $q(r)$, соответствующая принятой схеме предельного состояния двухслойной круглой пластины с трубчатыми связями (фиг. 1), определяется из уравнения

$$D_1 + D_2 + D_c = A, \quad (12)$$

где D_1 и D_2 — скорости диссипации энергии в составляющих перфорированных пластинах;

D_c — скорость диссипации энергии в связях, равная мощности предельных моментов M_{*i} на скоростях пово-

рота в пластических шарнирах $\frac{dw(r_i)}{dr}$ или, что то же самое, мощности предельных поперечных сил Q_{*i} на скоростях перемещений $L \cdot \frac{dw(r_i)}{dr}$:

$$D_c = \sum_i Q_{*i} L \left| \frac{dw(r_i)}{dr} \right| = 2 \sum_i M_{*i} \left| \frac{dw(r_i)}{dr} \right|; \quad (13)$$

причем M_{*i} и Q_{*i} определяются формулами (11);

$L = 2l$ — длина трубчатых связей;

A — мощность внешней нагрузки на скоростях перемещений $w(r)$:

$$A = 2\pi \int_0^R q(r) w(r) r dr. \quad (14)$$

Если все связи одинаковы, расположены равномерно (например, по вершинам правильных n -угольников, $n=3, 4$ или 6) и их число z велико, то суммирование в формуле (13) упрощается:

$$D_c = \frac{4\pi M_*}{F_c} \int_0^R \left| \frac{dw(r)}{dr} \right| r dr, \quad (13a)$$

где $F_c = \frac{F}{z}$ — площадь пластины, приходящаяся на одну связь.

Рассмотрим подробнее случай двухслойной круглой пластины с опертым или защемленным краем, изгибаемой равномерным давлением.

Для пластины с опертым краем примем поле скоростей перемещений

$$w(r) = w_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right). \quad (15)$$

Тогда

$$D_1 + D_2 = 2\pi w_0 \left(\frac{a_1}{b} M_{s1} + \frac{a_2}{b} M_{s2} \right),$$

$$D_c = 2\pi w_0 M_* \frac{R^2}{F_c}, \quad A = \frac{1}{3} \pi q w_0 R^2, \quad (16)$$

$$q_* = \frac{6}{R^2} \left(\frac{a_1}{b} M_{s1} + \frac{a_2}{b} M_{s2} + M_* \frac{R}{F_c} \right),$$

Здесь в общем случае $a_1 \neq a_2$, так как ширину перемычек следует определять с учетом впаивных участков трубок.

В случае защемленного края примем, что вблизи края равномерное расположение трубок по вершинам правильных многоугольников плавно переходит в ряд трубок, расположенных по краевой окружности радиуса R , с шагом b_k и перемычками a_{*k} . Влиянием неравномерности расположения связей в переходной зоне будем пренебрегать.

Как и в случае опертой пластины примем поле скоростей перемещений, соответствующее точному решению задачи для сплошной пластины с заземленным краем [2]:

$$w(r) = w_0 \left(1 - \frac{\frac{r}{\rho}}{1 + \ln \frac{R}{\rho}} \right), \quad 0 \leq r \leq \rho \quad (17)$$

$$w(r) = w_0 \frac{\ln \frac{R}{r}}{1 + \ln \frac{R}{\rho}}, \quad \rho \leq r \leq R.$$

где ρ — неопределенный пока радиус границы областей.

Скорость диссипации энергии в соответствующих пластинах [3]:

$$D_1 + D_2 = \frac{2\pi w_0}{1 + \ln \frac{R}{\rho}} \left[\left(M_{s1} \frac{a_1}{b} + M_{s2} \frac{a_2}{b} \right) \left(1 + \frac{4}{\pi} \ln \frac{R}{\rho} \right) + M_{s1} \frac{a_{k1}}{b_k} + M_{s2} \frac{a_{k2}}{b_k} \right],$$

в связях — по формуле (13а):

$$D_c = \frac{2\pi M_* w_0}{F_c} \cdot \frac{2R - \rho}{1 + \ln \frac{R}{\rho}}.$$

Мощность давления q

$$A = \frac{\pi q w_0 R^2}{2 \left(1 + \ln \frac{R}{\rho} \right)} \left(1 - \frac{\rho^2}{3R^2} \right).$$

Подставляя эти величины в уравнение (12), находим:

$$q_* = \frac{12 \left[\left(M_{s1} \frac{a_1}{b} + M_{s2} \frac{a_2}{b} \right) \left(1 + \frac{4}{\pi} \ln \frac{R}{\rho} \right) + M_{s1} \frac{a_{k1}}{b_k} + M_{s2} \frac{a_{k2}}{b_k} + \frac{M_* R}{F_c} \left(2 - \frac{\rho}{R} \right) \right]}{3R^2 - \rho^2} \quad (18)$$

Радиус ρ определяется из условия $\frac{dq_*}{d\rho} = 0$, которое приводит к трансцендентному уравнению:

$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{a_1}{b} M_{s1} + \frac{a_2}{b} M_{s2} \right) \left(1 + \frac{\pi}{2} + \ln \frac{R^2}{\rho^2} - 3 \frac{R^2}{\rho^2} \right) + 2 \left(\frac{a_{k1}}{b_k} M_{s1} + \frac{a_{k2}}{b_k} M_{s2} \right) + \frac{M_* R}{F_c} \left(4 - \frac{\rho}{R} - 3 \frac{R}{\rho} \right) = 0.$$

Числовые расчеты показывают, что с небольшой погрешностью для q_* , не превышающей обычно $2 \div 3\%$, можно просто принимать в формуле (18) $\rho = r$, что соответствует полю скоростей перемещений в виде (15).

Тогда

$$q_* = \frac{6}{R^2} \left[\left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_{k1}}{b_k} \right) M_{s1} + \left(\frac{a_2}{b} + \frac{a_{k2}}{b_k} \right) M_{s2} + \frac{M_* R}{F_c} \right] \quad (18a)$$

При отсутствии периферийного ряда отверстий ($a_k = b_k$) следует иметь в виду, что, как и в случае однослойной защемленной пластины, предельное состояние может возникнуть при образовании пластических шарниров по сторонам и диагоналям любого многоугольника, проходящего через центры отверстий.

Например, при «сотовом» расположении трубок предельное давление следует определять по формуле, соответствующей вписанному в круг шестиугольнику:

$$q_* = \frac{16}{R^2} \left(\frac{a_1}{b} M_{s1} + \frac{a_2}{b} M_{s2} + \frac{M_* R}{F_c} \right), \quad (20)$$

если она дает меньшие значения, чем формулы (18) или (18a).

В таблицах 1 и 2 приведены в безразмерном виде исходные данные и результаты расчета предельного давления для характерных вариантов двухслойных пластин симметричного строения с трубчатыми связями. В скобках указаны также результаты расчета по формулам работы [4].

Из сравнения видно, что принятая схема предельного состояния с образованием пластических шарниров в связях реализуется в широком диапазоне параметров, особенно в пластинах с защемленным краем.

Таблица 1

Исходные данные

$$h_1 = h_2 = h; \sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_{sc} = \sigma_s; M_{s1} = M_{s2} = M = \frac{\sigma_s h^2}{4}; \\ a_1 = a_2 = a_{k1} = a_{k2} = a; b_k = b = 4h; F_c = 13,9h^2$$

Вариант	$\frac{l}{h}$	$\frac{d_k}{h}$	$\frac{d_s}{h}$	$\frac{a}{h}$	λ	$\frac{M_s}{Mh}$	$\frac{M_*}{Mh}$
I — A	2	1,6	1,2	2,8	0,825	1,57	1,12
II — A	4	1,6	1,2	2,8	1,65	1,57	1,47
I — B	2	3	2,5	1,5	0,42	7,56	3,10
II — B	4	3	2,5	1,5	0,84	7,56	5,46

Предельные давления $\frac{100q^*}{\sigma_s}$

Вариант	$\frac{R}{h}$	Край оперт			Край защемлен		
		20	40	80	20	40	80
I — A		1,13 (4,13)	0,43 (1,03)	0,18 (0,26)	1,65 (8,07)	0,56 (2,02)	0,22 (0,50)
II — A		1,32 (6,88)	0,53 (1,72)	0,23 (0,43)	1,84 (13,4)	0,66 (3,36)	0,26 (0,84)
I — B		1,95 (2,95)	0,91 (0,73)	0,44 (0,18)	2,23 (6,79)	0,98 (1,70)	0,45 (0,42)
II — B		3,23 (4,85)	1,54 (1,21)	0,75 (0,30)	3,51 (11,3)	1,61 (2,83)	0,77 (0,71)

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гвоздев. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Гос. изд. строит. литературы, 1949.
2. Х. Гопкинс, В. Прагер. Несущая способность круглых пластинок. Сб. перев. «Механика», ИЛ, № 3, 1955.
3. Я. Б. Маркман. К расчету равномерно перфорированных пластин по несущей способности. Сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей», № 6 «Машиностроение», М., 1969.
4. Л. И. Поляков, Ю. Т. Поляков, М. А. Рудис. О несущей способности двухслойной круглой пластинки, ОТН. «Механика и машиностроение», № 6, 1962.
5. Л. И. Поляков, М. А. Рудис. Некоторые вопросы предельного равновесия круглых пластин с учетом температурных эффектов. Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций» № 4, «Наукова думка», 1964.