

Н. С. КОНДРАШОВ

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ТРУБОПРОВОДОВ

Трубопроводы летательных аппаратов и двигателей подвержены действию разнообразных переменных сил, которые вызывают усталостные поломки, течи, потертости и т. д. Из всего многообразия переменных сил наиболее существенны только кинематические воздействия, связанные с вибрациями корпусов, и пульсации в протекающей внутри жидкости. Последние могут вызвать параметрические колебания трубопроводов.

К настоящему времени вопросу влияния протекающей внутри трубопровода жидкости на его поперечные колебания посвящено несколько работ: [1], [2], [3], [6], [7]. В первых двух исследовано влияние скорости стационарного потока, причем в [1] трубопровод рассматривался как гибкая нить. В этих двух работах были получены формулы для частот свободных колебаний и вытекающие из них условия для статической потери устойчивости. В работах [6], [7] исследованы свободные колебания трубопровода как балки, с учетом давления и скорости внутреннего стационарного потока. Во всех перечисленных работах свободные колебания трубопроводов рассматривались в линейной постановке.

Линейная задача динамической устойчивости трубопровода (параметрических колебаний) впервые была поставлена и решена в [3]. Рассматривая влияющие пульсирующего потока на колебания трубопровода, автор известными приемами приводит дифференциальное уравнение к виду Матье-Хилла и в дальнейшем строит области динамической неустойчивости. Эксперименты, проведенные автором, подтверждают тот факт, что в областях неустойчивости возникают интенсивные поперечные колебания. Однако решение линейной задачи не позволило автору теоретически определить амплитуду установившихся колебаний.

Тем не менее вопрос определения амплитуд установившихся колебаний является не менее важным, чем определение областей неустойчивости.

В настоящей статье решается задача о параметрических колебаниях трубопроводов с учетом демпфирования и цепных растягивающих усилий.

Рассмотрим прямолинейный участок трубопровода на податливых опорах с линейными упругими характеристиками (фиг. 1),



Фиг. 1.

внутри которого протекает жидкость под давлением p со скоростью v , c_1 , c_2 , c_3 — соответственно угловая, поперечная и продольная жесткости. Для дальнейшего предположим, что:

1. изменением скорости и плотности жидкости можно пренебречь;

2. закон изменения давления в жидкости известен, и поперечные колебания трубки не вызывают в жидкости никаких дополнительных волновых явлений;

3. известны демпфирующие свойства опор и материала трубопровода, трением в жидкости и трением о воздух можно пренебречь.

Кроме перечисленных, остаются в силе все обычные допущения сопромата.

С учетом растягивающих цепных усилий и движущейся под давлением жидкости, свободной от предположения 1, поперечные колебания трубопровода описываются уравнением:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + a_3 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a_4 \frac{\partial y}{\partial x} + a_5 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{p f_0 + m_0 v^2}{EI}; \quad a_2 = \frac{2m_0 v}{EI}; \quad a_3 = \frac{m_0 + m}{EI};$$

$$a_4 = \frac{f_0 \frac{\partial p}{\partial x} + m_0 \left(v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)}{EI}; \quad a_5 = -\frac{1}{2l} \frac{c_1 F}{(EF + c_3 l)};$$

f_0 — площадь проходного сечения;

EI — жесткость сечения на изгиб;

EF — жесткость сечения на растяжение;

m, m_0 — погонные массы пустого трубопровода и жидкости.

Все рассмотренные ранее уравнения, описывающие поперечные колебания трубопровода с учетом протекающей внутри жидкости, являются частными случаями уравнения (1).

Если источник возмущения, например, насос, создает моногармоническое возмущение, то в силу предположения 1 закон изменения внутренних параметров можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \Delta p \cos \omega t, \\ v &= v_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p_0 , v_0 — постоянные составляющие давления и скорости; Δp — амплитуда пульсаций давления; ω — круговая частота пульсаций.

Зависимости (2) являются достаточно справедливыми, если длина продольной волны в жидкости значительно больше длины трубопровода: $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg l$ (c — скорость звука). Если λ соизмерима с l , то при заданных Δp (2) приводит к завышению амплитуды колебания и расширению областей неустойчивости.

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом Бубнова — Галеркина. Примем приближенно:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \cdot \varphi_i(x), \quad (3)$$

где $f_i(t)$ — подлежащие определению функции времени; $\varphi_i(x)$ — аппроксимирующие функции, удовлетворяющие граничным условиям.

В качестве функций $\varphi_i(x)$ могут быть выбраны формы поперечных колебаний (балочные функции) или формы при продольном изгибе.

В поставленной задаче практический интерес представляет исследование параметрических колебаний вблизи частоты основного тона. Поэтому ограничимся первым членом ряда (3).

$$y(x, t) = f_1(t) \varphi_1(x). \quad (4)$$

В дальнейшем индекс 1 опустим. Применяя к уравнению (1) метод Бубнова — Галеркина и замечая, что для симметричных граничных условий $\int_0^l \varphi'(x) \varphi(x) dx = 0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{f} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) f + \gamma f^3 = 0, \quad (5)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{1}{a_3} \frac{\int_0^l \varphi^{IV} \varphi dx + a_1 \int_0^l \varphi'' \varphi dx}{\int_0^l \varphi^2 dx}, \quad \Omega — \text{собственная частота без учета не-}$$

линейности,

$$2\mu = \frac{-\Delta p f_0}{EI \frac{\int_0^l \varphi^{IV} \varphi dx}{\int_0^l \varphi^{II} \varphi dx} + \rho_0 f_0 + m_0 v_0^2}, \quad \gamma = \frac{a_5}{a_3} \frac{\int_0^l \varphi'' \varphi dx \int_0^l (\varphi')^2 dx}{\int_0^l \varphi^2 dx}.$$

Прежде чем перейти к решению уравнения (5), добавим в него член, соответствующий силам трения. Предположим пока, что трение вязкое. С учетом вязкого трения вместо (5) будем иметь:

$$f'' + 2\varepsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \omega t)f + \gamma f^3 = 0, \quad (6)$$

где ε — коэффициент затухания для основного тона, который легко определяется, если известны демпфирующие характеристики опор и материала трубопровода.

Аналогичное уравнение было получено В. В. Болотиным [4] для динамической устойчивости стержней.

В качестве приближенного решения уравнения (6) воспользуемся гармоническим приближением.

$$f_t = a \sin \frac{\omega t}{2} + b \cos \frac{\omega t}{2}. \quad (7)$$

Это приближение практически достаточно для основного параметрического резонанса; побочные резонансы здесь не рассматриваются из-за отсутствия к ним практического интереса.

Подставим (7) в (6) и в соответствии с методом Бубнова—Галеркина потребуем, чтобы результат подстановки (L) был ортогонален каждой из функций:

$$\sin \frac{\omega t}{2} \text{ и } \cos \frac{\omega t}{2},$$

$$\int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} L \cdot \sin \frac{\omega t}{2} \cdot dt = 0, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} L \cdot \cos \frac{\omega t}{2} \cdot dt = 0.$$

В результате интегрирования получим систему двух однородных уравнений относительно a и b .

$$\left[\Omega^2(1 + \mu) - \frac{\omega^2}{4} \right] a - \varepsilon \omega b + \frac{3}{4} \gamma A^2 a = 0;$$

$$\left[\Omega^2(1 - \mu) - \frac{\omega^2}{4} \right] b - \varepsilon \omega a + \frac{3}{4} \gamma A^2 b = 0. \quad (8)$$

Здесь $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ — амплитуда колебания.

Из условия существования нетривиального решения приравняем детерминант системы (8) нулю и, раскрывая его, получим

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3}\gamma} \cdot \sqrt{n^2 - 1 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\delta^2}{\pi^2}}}, \quad (9)$$

$n = \frac{\omega}{2\Omega}$, $\delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}$ — декремент колебания для основной формы.

На первый взгляд может показаться, что полученное решение справедливо только для вязкого трения. Но вязкое трение в конструкциях трубопроводов почти не встречается. Наоборот, трение в материале и в опорах практически не зависят от скорости деформирования. В связи с этим используем упруго-вязкую схему [5]. Дело в том, что амплитуда установившихся колебаний зависит не от характера изменения силы трения, а от величины рассеянной за цикл энергии $\Psi_{(A)}$.

Считая процесс колебания моногармоническим с частотой $\frac{\omega}{2}$ (точность метода решения уравнения (9), вычислим величину потерянной за цикл энергии в упруго-вязкой схеме.

$$\bar{\Psi} = \frac{\pi k \omega A^2}{2}. \quad (10)$$

Формально приравнявая $\Psi_{(A)}$ и (10), получим условный коэффициент вязкости $\bar{k} = \frac{2\Psi_{(A)}}{\pi\omega A^2}$, по которому определяем условный коэффициент затухания.

$$2\varepsilon = \frac{\bar{k}}{(m_0 + m)l} = \frac{2\Psi_{(A)}}{\pi\omega A^2 (m_0 + m)l}. \quad (11)$$

После подстановки (11) в (9) имеем

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3}\gamma} \sqrt{n^2 - 1 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{\delta^2}{\pi^2}}}, \quad (12)$$

где

$$\delta = \frac{\Psi_{(A)}}{A^2\Omega^2 (m_0 + m)l}. \quad (13)$$

В конечном счете $\delta = \delta_{(A)}$ определяется по экспериментальной зависимости $\Psi_{(A)}$. Если известны демпфирующие свойства опор и материала, то при заданной форме колебания вычисление $\Psi_{(A)}$ не представляет труда.

Подставляя зависимость $\delta_{(A)}$ в (12), можно известными способами решить полученное уравнение относительно A .

Иногда экспериментальную зависимость (13) удобно аппроксимировать степенным рядом

$$\delta_{(A)} = \delta_0 + \delta_1 A + \delta_2 A^2 + \delta_3 A^3 + \dots \quad (14)$$

Для некоторых частных случаев результат подстановки (14) в (12) легко разрешается относительно A .

1. $\delta = \delta_0$ A вычисляется по формуле (12)

2. $\delta = \delta_1 A$

$$A = \frac{2}{3} \frac{\Omega^2}{\gamma} \sqrt{\pm \sqrt{12 \frac{\delta_1^2}{\pi^2} \frac{\gamma}{\Omega^2} (1-n^2) + 9\mu^2 \frac{\gamma^2}{\Omega^4} + 4 \frac{\delta_1^4}{\pi^4}} - 3 \frac{\gamma}{\Omega^2} (1-n^2) - 2 \frac{\delta_1^2}{\pi^2}}. \quad (15)$$

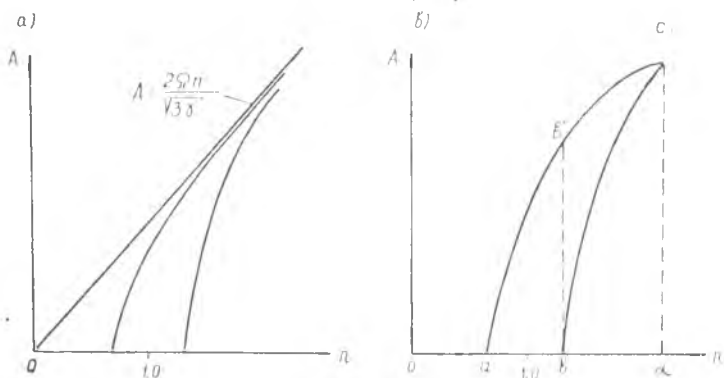
$$3. \delta = \delta_2 A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{\pm \sqrt{4\mu^2 \left(\frac{\delta_2^2}{\pi^2} + \frac{9}{16} \frac{\gamma^2}{\Omega^4} \right) - 4(1-n^2)^2 \frac{\delta_2^2}{\pi^2} - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\Omega^2} (1-n^2)}{\frac{9}{8} \frac{\gamma^2}{\Omega^4} + 2 \frac{\delta_2^2}{\pi^2}}}}. \quad (16)$$

$$4. \delta = \delta_0 + \delta_2 A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{\pm \sqrt{4\mu^2 \left(\frac{\delta_2^2}{\pi^2} + \frac{9}{16} \frac{\gamma^2}{\Omega^4} \right) - \left[\frac{3}{2} \frac{\gamma}{\Omega^2} \frac{\delta_0}{\pi} - 2(1-n^2) \frac{\delta_2}{\pi} \right]^2 - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\Omega^2} (1-n^2) - 2 \frac{\delta_0 \delta_2}{\pi^2}}{\frac{9}{8} \frac{\gamma^2}{\Omega^4} + 2 \frac{\delta_2^2}{\pi^2}}}}. \quad (17)$$

Анализ полученных формул показывает, что если в системе только линейное демпфирование, то при $\mu \gg \frac{\delta_0}{\pi}$ и $n \rightarrow \infty$ оба решения стремятся к асимптоте $A = \frac{2\Omega n}{\sqrt{3}\gamma}$ (фиг. 2а). Только при



Фиг. 2.

нелинейном демпфировании имеем конечную амплитуду при любом n (фиг. 2в). Полученные формулы для амплитуды дают два решения, третьим решением является тривиальное $A = 0$.

Здесь не исследуется устойчивость полученных решений, но по аналогии с рассмотренными ранее нелинейными задачами можно сказать, что:

1. Решение, соответствующее нижней ветви кривой (ветвь bc на фиг. 2в) неустойчиво.

2. Тривиальное решение неустойчиво в диапазоне на участке cd .

3. Изменение амплитуды по частоте b при прямом и обратном ходах происходит, как показано на фиг. 2в стрелками.

Из полученных формул (12), (15), (16), (17) можно непосредственно определить амплитуду колебания для любого n . Очевидно, кроме этого, инженера интересуют и более конкретные вопросы, а именно: на каких частотах начнутся параметрические колебания, какова величина максимальной амплитуды и на какой частоте она достигается.

Полагая в (12) с учетом (14) $A=0$, получим частоты, на которых начинаются параметрические колебания при прямом и обратном ходах.

$$n = \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{\delta_0^2}{\pi^2}}}. \quad (18)$$

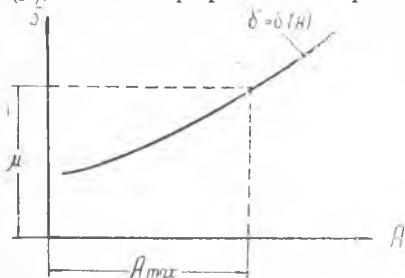
По существу (18) является уравнением границы устойчивости в координатах $n - \mu$, которое было получено в [3]. Разница состоит в том, что в [3] величина μ зависит от n , мы же предположили в начале, что μ — известно. В формуле (18) (+) соответствует точке a , а (—) точке b (фиг. 2б).

Из условия $\frac{dA}{dn} = 0$ находим сравнительно простые формулы для максимальных амплитуд и частот, соответствующих им (табл. 1).

Таблица 1

δ	A_{\max}	$n(A_{\max})$
$\delta = \delta_0$	$A_{\max} = 0$ при $\mu < \frac{\delta_0}{\pi}$ $A_{\max} = \infty$ при $\mu \geq \frac{\delta_0}{\pi}$	$n = \infty$ при $\mu \geq \frac{\delta_0}{\pi}$
$\delta = \delta_1 A$	$A_{\max} = \mu \frac{\pi}{\delta_1}$	$n = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\Omega^2} \frac{\pi^2 \mu^2}{\delta_1^2}}$
$\delta = \delta_2 A^2$	$A_{\max} = \sqrt{\mu \frac{\pi}{\delta_2}}$	$n = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\Omega^2} \frac{\pi \mu}{\delta_2}}$
$\delta = \delta_0 + \delta_2 A^2$	$A_{\max} = \sqrt{\mu \frac{\pi}{\delta_2} - \frac{\delta_0}{\delta_2}}$	$n = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\Omega^2} \left(\frac{\pi \mu}{\delta_2} - \frac{\delta_0}{\delta_2} \right)}$ при $\mu > \frac{\delta_0}{\pi}$

Величину максимальной амплитуды можно сравнительно просто определить для любой зависимости декремента от амплитуды. Из (12) видно, что A_{\max} соответствует равенству нулю внутреннего корня, т. е. $\pi\mu = \delta_{(A)}$. Зная экспериментальную зависимость $\delta_{(A)}$, можно графически определить A_{\max} (фиг. 3).



Фиг. 3.

Здесь следует заметить, что A_{\max} зависит только от коэффициента возбуждения μ и от демпфирующих свойств системы. Это по-видимому, объясняется тем, что, как и в вынужденных колебаниях, при $A = A_{\max}$ возбуждающие силы идут только на преодоление силы трения.

Статическая устойчивость трубопроводов является предельным случаем динамической устойчивости. Положив в (12) $n = 0$ и $\mu = 0$, получим амплитуду статического прогиба

$$A = \sqrt{-\frac{4\Omega^2}{3\gamma}}. \quad (19)$$

Пока Ω^2 положительна, трубопровод статически устойчив. Условие $\Omega = 0$ дает критические параметры, соответствующие началу потери статической устойчивости. При конечном отрицательном Ω^2 получим конечные значения A .

В заключение рассмотрим частный, но очень распространенный случай — жесткую заделку. В качестве аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ выберем кривую прогибов при статической потере устойчивости:

$$\varphi(x) = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right). \quad (20)$$

Продольная жесткость для заделки $c_3 = \infty$. Подставляя $\varphi(x)$ и c_3 в (5), получим:

$$\Omega^2 = \frac{16}{3} \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EI}{m + m_0} \left(1 - \frac{l^2}{4\pi^2} \frac{\rho_0 f_0 + m_0 v_0^2}{EI}\right);$$

$$2\mu = \frac{\Delta p \tau_0}{4 \frac{\pi^2}{l^2} EI - \rho_0 f_0 - m_0 v_0^2}; \quad \gamma = \frac{4}{3} \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EI}{m_0 + m}.$$

В качестве примера рассмотрим стальной трубопровод из IX18H9T ($E = 1,78 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$) длиной $l = 50$ см, с внутренним и внешним диаметрами $d = 0,6$ см, $D = 0,8$ см, по которому течет пульсирующая жидкость с параметрами:

$$\Delta p = 10 \text{ атм}, \quad \rho_0 = 200 \text{ атм}, \quad v_0 = 200 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

$$g \frac{m_0}{f_0} = \gamma_0 = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}. \quad \text{По (21) вычислим } \mu \text{ } (\mu = 0,0165).$$

Для рассматриваемого трубопровода, закрепленного стандартными жесткими зажимами из сплава АВТ, зависимость деформента от амплитуды приближенно можно представить в виде:

$$\delta = \delta_0 + \delta_2 A^2, \text{ причем, для } A \text{ см. } \delta = 0,005 \text{ и } \delta_2 = 5 \frac{1}{\text{см}}.$$

По формуле из таблицы 1 находим величину максимальной амплитуды $A_{\text{max}} = 0,097 \text{ см}$. При таких амплитудах растягивающими напряжениями можно пренебречь. Максимальные изгибные напряжения определим по формуле

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{2-\tau^2}{l^2} EDA_{\text{max}}, \quad \sigma_{\text{max}} = 11,0 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

Если принять $\tau_{-1} = 18 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$, то для рассматриваемого трубопровода коэффициент запаса прочности $k = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\text{max}}} = 1,63$. Статическая потеря устойчивости возможна лишь в длинных стальных трубопроводах. Так для трубопровода $d = 0,6 \text{ см}$, $D = 0,8 \text{ см}$, $\rho_0 = 200 \text{ кг/см}^2$, $v_0 = 200 \text{ см/сек}$ и $\gamma_0 = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{сек}^2}$ потеря статической устойчивости возможна лишь для трубопровода $l = 120 \text{ см}$. Но для гибких шлангов из дюрита, резины, фторопласта и т. д. потеря статической устойчивости может привести к значительным отклонениям от прямолинейной формы равновесия и при малых длинах.

Изложенные в данной статье материалы позволяют определить величину амплитуды колебания внутри первой области неустойчивости. Знание амплитуды позволит в большинстве случаев не выполнять частотную отстройку от частот $n = 0,25-1,5$, как предлагается в [3], т. к. иногда это связано с конструктивными трудностями и зачастую ведет к утяжелению системы трубопроводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Гольденблат, «Некоторые новые проблемы динамики сооружений» Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1950.
2. В. И. Феодосьев, «О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости», инженерный сборник, АН СССР, ОТН, институт механики, ТХ, 1951.
3. В. С. Ушков, «Колебания и динамическая устойчивость трубопроводов самолетных гидросистем», автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, 1957.
4. В. В. Болотин, «Динамическая устойчивость упругих систем», ГИТТЛ, 1956.
5. Я. Г. Пановко, «Внутреннее трение при колебаниях упругих систем», Физматгиз, 1960.
6. Heinrich G. «Schwingungen durchströmter Rohre», Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik», Band 36, 11/12, 5. 417—425, 1956.
7. Housner G. W. «Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Elowing Fluid», Journ. Appl. Mech. vol. 19, Nor, s. 205—208, 1952.