УДК 534.647:629.7.036

В. И. Бояринцев

ОБ ОЦЕНКЕ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ ВИБРАЦИИ ГТД

Установление адекватности принятой модели реальному виброприцессу является важным этапом процедуры вибрационной диагностики ГТД. Алгоритм измерения вибрации и параметры измерительной аппаратуры выбирают согласно модели. Несоответствие между процессом и приписываемой ему моделью может привести к существенным погрешностям измерений и стать причиной ошибок при последующей классификации технического состояния двигателя.

Характерной особенностью вибрации ГТД является, как известно, концентрация вибрационной энергии в узких полосах частот. Квазипериодический характер компонент вибрации обусловил общую форму их математического описания моделью «синусоида плюс шум» [1]. Оценка адекватности модели наряду с классификацией процесса должна включать определение числовых значений параметров компоненты. Определение этих параметров по результатам спектрального анализа процесса затруднительно ввиду сложности раздельного измерения интенсивностей шума и синусоиды в полосе частот, занимаемой компонентой.

В статье рассматривается метод идентификации параметров модели, основанный на использовании числовых характеристик плотности распределения мгновенных значений компоненты. Предлагаемый метод позволяет сравнительно просто получать оценки параметров модели в полосе компоненты. Большим достоинством метода является его инвариантность к частоте и фазе исследуемых процессов. Благодаря этому он может быть использован для обнаружения дефектов ГТД, ранняя степень развития которых характеризуется возникновением в определенном частотном диапазоне синусоидального колебания заранее неизвестной частоты на фоне вибрационного шума, например, некоторых видов неустойчивости рабочих процессов.

В работе [1] предложена обобщенная модель спектра вибрации ГТД в виде суперпозиции конечного числа узкополосных компонент и широкополосного вибрационного шума, имеющая следующее математическое выражение:

$$G(f) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{A^2_{0i}}{2} \delta(f - f_{0i}) + G_{0i}(f) \right] + G_{\text{вш}}(f). \quad (1)$$

Здесь A_{0i} — амплитуда синусоиды в составе i-й компоненты;

f_{0i} — частота синусоиды в составе i-й компоненты;

$G_{0i}(f)$ — спектральная плотность узкополосного шума в составе i-й компоненты;

$G_{\text{вш}}(f)$ — спектральная плотность вибрационного шума.

Каждая i-я компонента обобщенной модели однозначно характеризуется двумя энергетическими параметрами:

отношением «синус/шум» —

$$a_i = \frac{A_{0i}}{\sigma_{\text{ш}i}\sqrt{2}}, \quad (2)$$

где $\sigma_{\text{ш}i} = \sqrt{\int\limits_{(\Delta f_i)} G_{0i}(f)\,df}$ — среднеквадратичное значение шума в составе i-й компоненты,

Δf_i — ширина энергетического спектра компоненты;

среднеквадратичным значением суммарного процесса —

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{A^2_{0i}}{2} + \sigma^2_{\text{ш}i}}$$

(интенсивностью вибрационного шума обычно пренебрегают ввиду его малости).

Из обобщенной модели могут быть получены практически важные частные модели компонент, образующиеся при предельных значениях параметра a_i: нормальная квазигармоническая вибрация ($a_i = 0$) и синусоидальная вибрация ($a_i = \infty$).

Аддитивность обобщенной модели позволяет рассматривать оценку ее адекватности как задачу классификации процессов, формулируемую следующим образом: по оценке параметра a_i, полученной путем измерений, необходимо отнести компоненту к одному из трех классов:

1—$a_i = 0$ — нормальная квазигармоническая вибрация;

2—$a_i = \infty$ — синусоидальная вибрация;

3—$a_i = 0 \div \infty$ — вибрация типа «синусоида плюс шум» (общий случай).

Измеренные величины a_i очевидно будут отличаться от предельных теоретических, поэтому для реализации предлагаемого подхода к оценке адекватности необходим критерий классификации.

Плотность вероятности суммы гармонического процесса со случайной начальной фазой и нормального шума может быть записана в виде [2]:

$$p_i(v) = \frac{a_i}{A_{0i}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{a_i^2(2v^2 + A_{0i}^2)}{2A_{0i}^2}\right]\left[I_0\left(\frac{a_i}{2}\right) I_0\left(\frac{2v}{A_{0i}} a^2_i\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\frac{a^2_i}{2}\right) I_{2n}\left(\frac{2v^2}{A_{0i}} a^2_i\right)\right],$$

где $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя n-го порядка.

Полученное соотношение показывает, что $p_i\ (v)$ зависит от a_i, как от параметра. Поэтому при оценке адекватности модели (1) нет необходимости сравнивать эмпирические плотности вероятности с теоретическими. Достаточно ограничиться сравнением их числовых характеристик, которые должны быть функционально связаны с a_i.

Установим эти зависимости, воспользовавшись методом характеристических функций [2].

Известно, что плотность вероятности $p_i\ (v)$ и характеристическая функция $\Theta_i\ (\eta)$ распределения связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$p_i(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_i(\eta)\, e^{-j\eta v} d\eta$$

и

$$\Theta_i(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(v)\, e^{j\eta v} dv,$$

где η — вещественная переменная.

Числовые характеристики плотности вероятности определяются через производные кумулянтной функции

$$\psi_i(\eta) = \ln \Theta_i(\eta) \tag{3}$$

при $\eta = 0$ следующим образом:

среднее значение $m_i = \psi^{\mathrm{I}}(\eta)/_j$; (4)

дисперсия $\sigma_i^2 = - \psi_{\mathrm{II}}(\eta)$; (5)

коэффициенты асимметрии и эксцесса, соответственно:

$$s_i = \frac{\psi^{\mathrm{III}}(\eta)}{[\psi^{\mathrm{II}}(\eta)]^{3/2}}; \tag{6}$$

$$E_i = \frac{\psi^{\mathrm{IV}}(\eta)}{[\psi^{\mathrm{II}}(\eta)]^2}. \tag{7}$$

Мгновенные значения синусоиды и шума в совпадающие моменты времени рассматриваем как независимые случайные величины. Тогда характеристическая функция $\Theta_i(\eta)$ суммы синусоиды и шума равна произведению характеристических функций слагаемых:

$$\Theta_i(\eta) = \Theta_{si}(\eta)\,\Theta_{\text{ш}i}(\eta).$$

Характеристические функции гармонического колебания с равномерно распределенной на интервале 0—2π фазой и нормальной плотности вероятности равны соответственно:

$$\Theta_{si}(\eta) = J_0(A_{0i}\eta),$$

$$\Theta_{\text{ш}i}(\eta) = \exp\left(-\frac{\sigma_{\text{ш}i}^2\eta^2}{2}\right);$$

где $J_0(A_{0i}\eta)$ — функция Бесселя нулевого порядка (первого рода).

Таким образом,

$$\Theta_i(\eta) = J_0(A_{0i}\eta)\exp\left(-\frac{\sigma_{\text{ш}i}^2\eta^2}{2}\right).$$

Воспользовавшись разложением $J_0(A_{0i}\eta)$ в ряд, имеем:

$$\Theta_i(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\left(A_{0i}\eta\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\sigma_{\text{ш}i}^2\eta^2}{2}\right).$$

Найдем четыре первых производных кумулянтной функции $\psi_i(\eta)$ при $\eta = 0$ и подставим их в уравнения (4), (5), (6) и (7).

После упрощений получим:

$$m_i = 0;$$

$$\sigma^2_{\xi i} = \frac{A^2_{0i}}{2} + \sigma^2_{\text{ш}i};$$

$$s_i = 0;$$

$$E_i = -1{,}5\frac{A^4_{0i}}{(A^2_{0i} + 2\sigma^2_{\text{ш}i})^2}.$$

Используя формулу (2), полученные уравнения приведем к виду, выражающему искомые функциональные зависимости:

$$\sigma^2_i = \sigma^2_{\text{ш}i}(1 - a^2_i); \tag{8}$$

$$E_i = -1{,}5\frac{a^4{}_i}{(a^2{}_i + 1)^2}. \tag{9}$$

Параметр a_i определяется как единственный вещественный и положительный корень биквадратного уравнения:

$$(1{,}5 + E_i)\,a^4{}_i + 2\,E_i a^2{}_i + E^2{}_i = 0,$$

получаемого из выражения (9):

$$a_i = \sqrt{\frac{-2\,E_i + \sqrt{-E^2{}_i - 6\,E_i}}{2\,(E_i + 1{,}5)}}. \tag{10}$$

Из уравнения (8) определим среднеквадратичное значение шума в составе компоненты:

$$\sigma_{\text{ш}i} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{1 + a^2{}_i}}, \tag{11}$$

а из уравнения (2), подставив в него найденное значение $\sigma_{\text{ш}i}$, — величину амплитуды синусоиды:

$$A_{0i} = \sigma_i\sqrt{\frac{2\,a^2{}_i}{1 + a^2{}_i}}. \tag{12}$$

Таким образом, экспериментально измерив величины σ_i и E_i компоненты, по формулам (10), (11) и (12) можно вычислить все необходимые параметры модели.

На рис. 1 приведена построенная по уравнению (10) зависимость отношения «синус/шум» вибрационной компоненты от коэффициента эксцесса плотности распределения ее мгновенных значений. Значениям $E = 0$ и $E = -1{,}5$ соответствуют $a = 0$ и $a = \infty$. На этом же рисунке изображена зависимость от Е безразмерного параметра

$$\alpha = \frac{A^2_0}{2\sigma^2} = \frac{a^2}{1+a^2}, \qquad (13)$$

характеризующего относительную долю энергии синусоиды в суммарной энергии компоненты. В отличие от a этот параметр во всем диапазоне изменения Е меняется более монотонно.

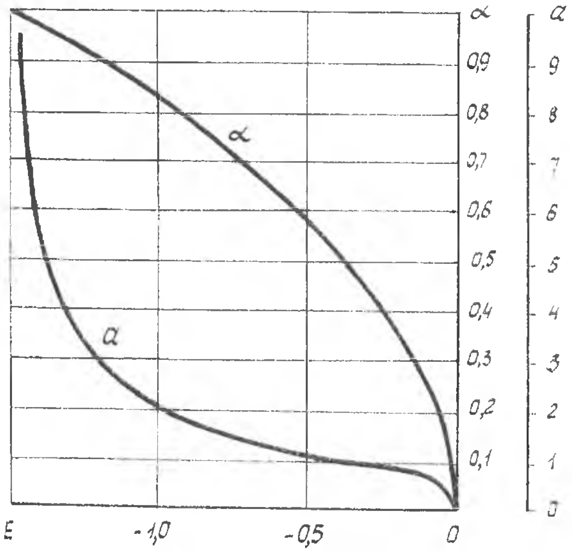

Рис. 1. Зависимость отношения «синус/шум» и параметра α от коэффициента эксцесса плотности распределения мгновенных значений вибрационной компоненты

Классификацию процессов целесообразно производить путем сравнения измеренных значений Е* с некоторыми пороговыми значениями E_s и $E_ш$, определяющими границы классов моделей. При этом классификация типа компоненты осуществляется по алгоритму:

— $1{,}5 < E^* \leqslant E_s$ — синусоидальная вибрация;

$E_ш \leqslant E^* \leqslant 0$ — квазигармоническая вибрация;

$E_s < E^* < E_ш$ — вибрация типа «синусоида плюс шум» (общий случай).

Величины порогов зависят от ошибок (потерь), к которым может привести несоответствие модели и процесса при решении диагностической задачи, и должны назначаться с учетом обусловленности этой задачи, т. е. чувствительности ее к вариациям параметров модели. Одним из возможных подходов к выбору порогов E_s и $E_ш$ является использование параметра α, определяемого соотношением (13). Для гармонической вибрации он выбирается близким к единице: $\alpha_s \cong 1$, для нормальной квазигармонической — $\alpha_ш \cong 0$. Далее из уравнения (13) находятся соответствующие величины a, которые затем подставляются в уравнение (9) для вычисления пороговых значений E_s и $E_ш$.

Изложенный метод был апробирован при анализе магнитограмм вибрации реальных ГТД. Исследования проводились путем амплитудно-статистического анализа мгновенных значений фильтрованных компонент спектров. Измеренные значения отношений «синус/шум» находились в пределах от $a_i = 0$ до $a_i > 10$. Величины α_s и $\alpha_ш$ выбирались из условия получения заданной статистической ошибки определения интенсивности компонент спектральным методом и составляли соответственно 0,95 и 0,05, что соответствует значениям $E_s = -1{,}35$ и $E_ш = -0{,}03$ или пороговым отношениям «синус/шум» $a_s = 4{,}5$ и $a_ш = 0{,}23$.

Эксперименты подтвердили практическую пригодность сравнительной простой модели (1) для математического описания вибрации различной физической природы и целесообразность разделения компонент на три рассмотренных класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авраменко А. А., Канунников И. П., Сидоренко М. К.* Обобщенная модель вибрации ГТД. «Конструкционная прочность двигателей». Тезисы докладов III Всесоюзной научно-технической конференции. КуАИ, 1974.

2. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Сов. радио», 1966.