

А. С. МОСТОВОЙ

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Задача об определении больших перемещений гибкого стержня постоянной жесткости при продольном изгибе имеет строгое аналитическое решение (см. например [1]). Оно дает уравнение упругой кривой гибкого стержня в параметрической форме с эллиптическими интегралами. Насколько нам известно, другие приемы определения больших перемещений гибкого стержня и решение этой задачи для  $EI \neq \text{const}$  в литературе не описаны. Аналитическое решение для случая  $EI \neq \text{const}$ , по-видимому, возможно лишь для единичных частных задач.

Можно заметить, что задание упругой линии для гибкого стержня в произвольном виде, удовлетворяющем конечным условиям, для определения критической силы  $P_{кр}$  энергетическим или другими методами не достигает цели. Такая упругая линия является весьма грубым приближением к действительной. Упомянутые методы справедливы лишь для определения Эйлеровой критической силы.

Ниже рассматривается графоаналитический метод последовательных приближений для построения упругой линии гибкого стержня переменной жесткости при продольном изгибе.

Предполагается, что напряжения в его сечениях не превосходят предела пропорциональности.

Рассмотрим стержень с шарнирно-закрепленными концами.

Задачу ограничиваем деформациями, при которых угол поворота конечного сечения  $\theta \leq 90^\circ$ .

Уравнение упругой линии  $EI \frac{y'''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = -P_{кр} y^*$  запишем в виде

\*  $P_{кр}$  — сила, большая первой критической  $P_{э}$ , удерживающая гибкий стержень в искривленном состоянии.

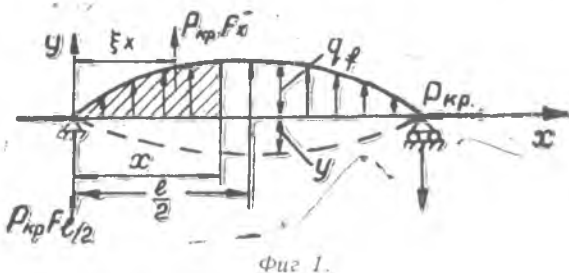
$$y'' = -P_{кр} \frac{y [1 + (y')^2]^{3/2}}{EI} = -P_{кр} \psi. \quad (1)$$

Прогиб в сечении балки можно определить методом фиктивных нагрузок, приняв  $-P_{кр} \psi = q_f$ . Тогда

$$y = P_{кр} \left[ x \int_0^{l/2} \psi dx - (x - \xi_x) \int_0^x \psi dx \right] = P_{кр} [F_{l/2} x - F_x (x - \xi_x)], \quad (2)$$

где

$$\psi = \frac{y [1 + (y')^2]^{3/2}}{EI}; \quad F_{l/2} = \int_0^{l/2} \psi dx; \quad F_x = \int_0^x \psi dx;$$



$\xi_x$  — координата центра тяжести грузовой площади  $F_x$  (фиг. 1).

При  $x = \frac{l}{2}$

$$y_{\max} = P_{кр} F_{l/2} \xi_{l/2} = P_{кр} S_{l/2}, \quad (2')$$

где  $\xi_{l/2}$  — координата центра тяжести грузовой площади  $F_{l/2}$ ;

$S_{l/2}$  — статический момент площади  $F_{l/2}$  относительно начала координат.

Угол поворота в сечении балки, согласно методу фиктивных нагрузок,

$$y' = P_{кр} (F_{l/2} - F_x). \quad (3)$$

При  $x = 0$ ,  $F_x = 0$  и

$$y'_{\max} = P_{кр} F_{l/2}. \quad (3')$$

Пусть известна сила  $P_{кр}$ , сжимающая шарнирно-опертый на концах стержень, и распределение  $EI$  по длине стержня. Требуется построить упругую линию.

Задаемся значением  $y_{\max}$  и видом упругой кривой. При этом соблюдаем условие, чтобы длина упругой кривой  $L$  была равна заданной длине стержня  $l$ .

Строим эпюру  $y'$  по длине стержня с помощью графического дифференцирования эпюры  $y$ , эпюру  $\psi = \frac{y [1 + (y')^2]^{3/2}}{EI}$  и эпюру  $F_x$ , полученную графическим интегрированием эпюры  $\psi$  (фиг. 2).

Можем определить значения  $y_{\max 1}$  и ряд значений  $y_1$  первого приближения по формулам (2'), (2):

$$y_{\max 1} = P_{кр} F_{l/2} \xi_{l/2} = P_{кр} S_{l/2};$$

$$y_1 = P_{кр} [F_{l/2} x - F_x (x - \xi_x)].$$

Полученная кривая  $y_1$  принимается за исходную и процесс повторяется до совпадения последующего и предыдущего значения прогибов.

Доказательство сходимости последовательных приближений для дифференциальных уравнений типа

$$y'' - f(x, y, y') = 0$$

дано Пикаром [3] при условии, чтобы  $x$  заключалось между пределами  $x_0 - \delta$  и  $x_0 + \delta$ , где  $\delta$  есть меньшая из двух величин  $a$  и  $\frac{b}{M}$ . При этом функции  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  предполагаются непрерывными и вещественными, пока переменные и их производные заключаются между пределами

$$(x_0 - a, x_0 + a), (y_0 - b, y_0 + b), (y_0' - b, y_0' + b), (y_0'' - b, y_0'' + b).$$

$M$  — есть наибольшее по абсолютной величине значение упомянутых функций.

Для уравнения (1) указанные условия выполняются (при  $x_0 = \frac{l}{2}$ ,  $a = \frac{l}{2}$ ,  $b = \infty$ ).

Сходимость приближений может быть обоснована также следующими соображениями.

Форма упругой кривой, отличная от соответствующей продольному изгибу может иметь место лишь при наличии дополнительных связей. Так как в рассматриваемой задаче последние отсутствуют, и учитывая устойчивость равновесия гибкого стержня при продольном изгибе в результате последовательных приближений придем к упругой кривой, соответствующей значению сжимающей силы  $P_{кр}$ .

В рассмотренном выше приеме необходимость графического дифференцирования упругой кривой каждого приближения снижает точность построений.

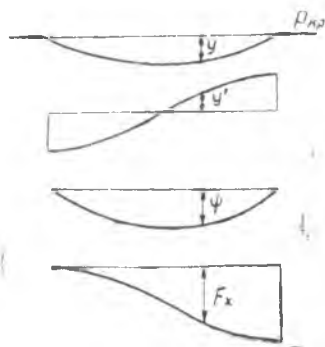
Чтобы избежать этого, после построения эпюры  $F_x$  (фиг. 2) и определения прогибов  $y_1$ , определяем также углы поворота первого приближения на основании зависимости (3);

$$y_1' = P_{кр} (F_{l/2} - F_x).$$

Полученные кривые  $y_1'$  и  $y_1$  принимаем за исходные, строим эпюры  $\psi_1$ ,  $F_{x1}$  первого приближения и т. д.

Рассмотрим некоторые другие условия закрепления стержня. Ограничимся двумя случаями.

Первый случай. Для стержня, защемленного на одном конце и нагруженного сжимающей силой на свободном конце, фор-



Фиг. 2.

ма упругой кривой и значение  $P_{кр}$  очевидно будут такие же, как для шарнирно-опертого стержня удвоенной длины с симметричным относительно середины распределением жесткостей.

Зависимость (3) для этого случая будет иметь вид:

$$y' = P_{кр} F_x. \quad (4)$$

$$y'_{\max} = P_{кр} F_l. \quad (4')$$

Здесь

$$F_l = \int_0^l \psi dx; \quad \psi = \frac{(y_{\max} - y) [1 + (y')^2]^{3/2}}{EI}.$$

Второй случай. Для стержня, заземленного с двух концов, имеем:

$$y'' = -\frac{P_{кр}}{EI} y [1 + (y')^2]^{3/2} + \frac{M_0}{EI} [1 + (y')^2]^{3/2} = \\ = -P_{кр} \psi + M_0 \psi_m, \quad (5)$$

где

$$\psi_m = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{EI}.$$

Задаваясь соответствующим видом упругой кривой (на концах стержня  $y' = 0$ ), аналогично предыдущему строим эпюры  $\psi$ ,  $F_x$  и получаем  $y'_{р1}$ ,  $y_{р1}$ .

Затем таким же образом построим эпюры  $\psi_m$ ,  $F_{xm} = \int_0^x \psi_m dx$  и, полагая  $M_0 = 1$ , получим  $y'_{m1} = (F_{m1/2} - F_{mx})$  и  $y_{m1}$ .

Значение конечного момента первого приближения определится из

$$M_{01} = \frac{(y'_{р1})_{\text{конц.}}}{(y'_{m1})_{\text{конц.}}},$$

где  $(y'_{р1})_{\text{конц.}}$ ,  $(y'_{m1})_{\text{конц.}}$  — соответствующие значения  $y'_{р1}$  и  $y'_{m1}$  в конечном сечении балки.

Окончательные значения угла поворота и прогиба первого приближения будут:

$$y'_1 = y'_{р1} - M_{01} y'_{m1}, \quad (6)$$

$$y_1 = y_{р1} - M_{01} y_{m1}. \quad (7)$$

Затем за исходные принимаем упругую линию  $y_1$  и эпюру углов поворота  $y'_1$  первого приближения и повторяем описанные выше действия.

Как показывают вычисления, процесс приближения довольно быстро сходится — достаточно двух-трех приближений для обеспечения приемлемой точности, соизмеримой с точностью вычислений.

Естественно, в целях сокращения числа приближений, нужно задаться подходящим начальным значением  $y_{\max}$ . Для этого последнее может быть принято по известному графику

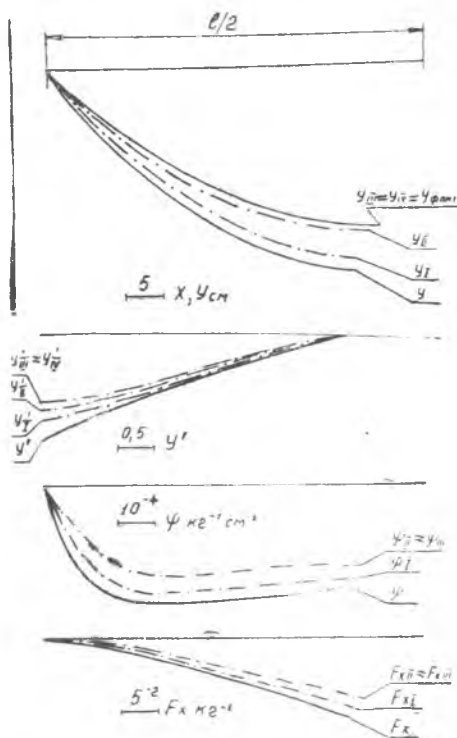
$$\frac{P_{кр}}{P_3} = f\left(\frac{y_m}{l}\right) \quad (\text{см. [1]})$$

для шарнирно опертых стержней, в предположении, что

$$EI \approx \text{const} \approx (EI)_{\text{средн.}}$$

Возможна также обратная постановка задачи: дан максимальный прогиб  $y_{\max}$  гибкого стержня (но не упругая линия, т. к. произвольная упругая линия не может быть удовлетворена при продольном изгибе гибкого стержня), требуется найти критическую силу  $P_{кр}$ .

В этом случае, например, для шарнирно-опертых концов, аналогично фиг. 2, за-



[Фиг. 3.]

даемся упругой кривой  $y$ , строим эпюру  $y'$ , эпюру  $\psi = \frac{y[1 + (y')^2]^{3/2}}{EI}$  и эпюру  $F_x$ .

Находим критическую силу первого приближения

$$P_{кр I} = \frac{y_{\max}}{F_{e/2} \xi_{e/2}}$$

и углы поворота первого приближения

$$y'_I = P_{кр I} (F_{e/2} - F_x).$$

Затем, аналогично «прямой» задаче, получаем упругую кривую первого приближения  $y_I$ , строим эпюры  $\psi_I$ ,  $F_{xI}$  и находим

$$P_{кр II} = \frac{y_{\max}}{F_{e/2 I} \xi_{e/2 I}} \text{ и т. д.}$$

На фиг. 3 приведены полученные в результате примерного расчета кривые  $y$ ,  $y'$ ,  $\psi$ ,  $F_x$  ряда последовательных приближений, а также фактическая упругая кривая для гибкого шарнирно-опертого стержня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко. «Устойчивость упругих систем», ГИЗ ТТЛ, 1955.
  2. А. С. Вольмир. «Устойчивость упругих систем», Физматгиз, 1963.
  3. А. Н. Крылов. «Лекции о приближенных вычислениях», ГИЗ ТТЛ, 1950.
-