2. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные пластинки. М.-Л., Гостехиздат, I947.
3. М е е р о в и ч И.И. Колебания прямоугольной плоской пластинки.- В сб.: Динамика авиадвигателей. М., Оборонгиз, I952, № 8.

Г.Г.Карташов, Н.Д.Степаненко

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК, ИЗГОТОВЛЯЕМЫХ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В связи с тем, что применение композиционных материалов для изготовления тонкостенных элементов конструкции ГТД типа оболочек является перспективным, возникает необходимость в разработке методов расчета их на прочность и колебания с учетом специфики строения и свойств композиционных материалов [I].

Первым шагом на пути решения этой задачи является получение уравнений напряженно-деформированного состояния, что и явилось темой данной работы.

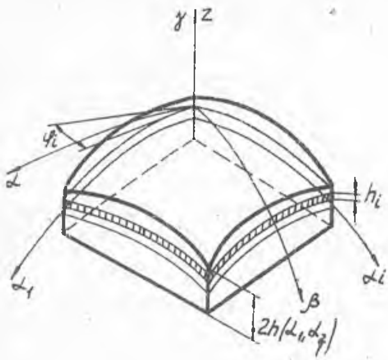
Обоснованию теории упругих анизотропных оболочек посвящено большое число работ [4] - [6]. В работе [6] изложена уточненная линейная теория упругих анизотропных многослойных оболочек. Эффект поперечного сдвига и нормальных поперечных деформаций учитывается для каждого слоя. В настоящей работе в качестве исходных для анализа приняты следующие гипотезы. Рассматривается неоднородная анизотропная оболочка переменной толщины. Материал каждого слоя является криволинейно-ортотропным с известным направлением осей упругой симметрии и линейно-упругим. В целом для оболочки учитываются деформации поперечного сдвига и обжатие нормального элемента.

Оболочка рассматривается в системе координат α_1 , α_2 , z , совпадающей с направлением главных кривизн срединной поверхности оболочки (рисунок); α , β , γ - оси упругой симметрии материала i - го слоя; φ_i , h_i - угол армирования и толщина i -го слоя соответственно; $2h(\alpha_1, \alpha_2)$ - толщина оболочки.

Пусть перемещение произвольной точки поверхности

$$\vec{U} = U_1\vec{e}_1 + U_2\vec{e}_2 + W\vec{e}_n , \qquad (I)$$

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_n$ — орты, образующие ортогональный триэдр в произвольной точке поверхности, отнесенной к линиям кривизны. Ком-



Р и с. I

поненты вектора перемещения задаются в виде [2]

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, z, t) = u_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + z\gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, t);$$

$$U_2(\alpha_1, \alpha_2, z, t) = u_2(\alpha_1, \alpha_2, t) + z\gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, t);$$

$$W(\alpha_1, \alpha_2, z, t) = W(\alpha_1, \alpha_2, t) + zW'(\alpha_1, \alpha_2, t) + \frac{z^2}{2}W''(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad (2)$$

где u_1 , u_2 , W — перемещения соответствующей точки срединной поверхности; γ_1 , γ_2 — углы наклона нормали к срединной поверхности; W' , W'' характеризуют поперечные нормальные деформации.

На основании принятого закона изменения перемещений по толщине оболочки и общих соотношений для компонент деформаций, записанных в криволинейных ортогональных координатах [3], выражения для компонент деформации оболочки можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{1+K_1 z}\left(\varepsilon_1 + K_1 z + \lambda_1 z^2\right); \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{1+K_2 z}\left(\varepsilon_2 + K_2 z + \lambda_2 z^2\right); \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{1+K_1 z}\left(\omega_1 + \tau_1 z\right) + \frac{1}{1+K_2 z}\left(\omega_2 + \tau_2 z\right); \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{33} &= W' + z W'' ; \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{1+k_1 z}\left(\bar{\varepsilon}_{13} + z\vartheta_1 + z^2\delta_1\right); \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{1+k_2 z}\left(\bar{\varepsilon}_{23} + z\vartheta_2 + z^2\delta_2\right),
\end{aligned}\right|$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 W ; \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_2 W ; \\
\omega_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} ; \\
\omega_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} ; \\
\varkappa_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\gamma_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 W' ; \\
\varkappa_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\gamma_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_2 W' ; \\
\tau_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\gamma_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} ; \\
\tau_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\gamma_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} ; \\
\bar{\varepsilon}_{13} &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \gamma_1 - k_1 u_1 ;
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \gamma_2 - K_2 u_2 ;\\
&\vartheta_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial W'}{\partial \alpha_1} ; \quad \vartheta_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial W'}{\partial \alpha_2} ;\\
&\delta_1 = \frac{1}{2A_1}\frac{\partial W''}{\partial \alpha_1} ; \quad \delta_2 = \frac{1}{2A_2}\frac{\partial W''}{\partial \alpha_2} ;\\
&\lambda_1 = \frac{1}{2} K_1 W'' ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} K_2 W'' .
\end{aligned}\right\}$$

В уравнениях (4) K_I и K_2 - главные кривизны срединной поверхности; A_I, A_2 - параметры Ляме. Уравнение (3) отличается от соответствующих уравнений [4] тем, что в полученных соотношениях параметры λ_1 , λ_2 , ϑ_1 , ϑ_2 , δ_1 , δ_2 , W' , W'' учитывают влияние изменения длины нормального элемента на соответствующие компоненты деформации.

Преобразуя выражение для ε_{12} по аналогии с тем, как это выполнено в [4] , получим IO параметров, полностью определяющих деформацию оболочки:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1 ; \ \varepsilon_2 ; \ K_1 ; \ K_2 ; \ \bar{\varepsilon}_{13} ; \ \bar{\varepsilon}_{23} ; \ \lambda_1 ;\\
&\bar{\varepsilon}_{12} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right);\\
&\tau_{12} = \tau_1 + K_1 \omega_2 ; \quad \tau_{21} = \tau_2 + K_2 \omega_1 .
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Вместо параметра λ_1 можно использовать один из параметров λ_2 , δ_1 , δ_2 .

Так как перемещения произвольной точки определяются 7 компонентами (u_1 , u_2 , W , γ_1 , γ_2 , W' , W''), а параметров, полностью определяющих деформацию оболочки, IO, то 3 уравнения неразрывности деформаций имеют вид

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial A_1 \varepsilon_{13}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[\frac{1}{A_2 k_2}\left(\frac{\partial A_2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\varepsilon_1 - \right.\right.\\
&\left.\left. - \frac{\partial A_1 \omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\omega_2 - A_1 A_2 k_2 \tilde{\varepsilon}_{13}\right)\right] - \frac{\partial A_2 \tilde{\varepsilon}_{23}}{\partial \alpha_1} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\frac{1}{A_1 k_1}\left(\frac{\partial A_1 \varepsilon_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\varepsilon_2 - \frac{\partial A_2 \omega_2}{\partial \alpha_1} - \right.\right.\\
&\left.\left. - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\omega_1 + A_1 A_2 k_1 \tilde{\varepsilon}_{23}\right)\right] + A_1 A_2 \left(k_1 \omega_2 - k_2\right) = 0 ;\\
&\frac{\partial A_1 \vartheta_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[\frac{1}{A_2 k_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\varkappa_1 - \frac{\partial A_2 \varkappa_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 \tau_1}{\partial \alpha_2} + \right.\right.\\
&\left.\left. + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\tau_2 + A_1 A_2 k_2 \vartheta_1\right)\right] - \frac{\partial A_2 \vartheta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\frac{1}{A_1 k_1}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\varkappa_2 - \right.\right.\\
&\left.\left. - \frac{\partial A_1 \varkappa_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 \tau_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\tau_1 + A_1 A_2 k_1 \vartheta_2\right)\right] + A_1 A_2 \left(k_1 \tau_2 - k_2 \tau_1\right) = 0 ;\\
&\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[\frac{1}{A_2 k_2}\left(\frac{\partial A_2 \lambda_2}{\partial \alpha_1} - \lambda_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\frac{1}{A_1 k_1}\left(\frac{\partial A_1 \lambda_1}{\partial \alpha_2} - \right.\right.\\
&\left.\left. - \lambda_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\right)\right] = 0 .
\end{aligned}\right\}
$$

Учитывая, что оси упругой симметрии материала слоя в общем случае составляют с направлением главных кривизн произвольный угол армирования φ_i , напряжения в оболочке определяются по формулам

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_{ii} = \frac{A_{i1}}{1+k_1 z}\varepsilon_1 + \frac{A_{i2}}{1+k_2 z}\varepsilon_2 + A_{i3} w' + \frac{A_{i6}}{(1+k_1 z)(1+k_2 z)}\bar{\varepsilon}_{12} + \\
&+ z\left[\frac{A_{i1}}{1+k_1 z}K_1 + \frac{A_{i2}}{1+k_2 z}K_2 + A_{i3} w'' + A_{i6}\left(\frac{\tau_{12}}{1+k_1 z} + \frac{\tau_{21}}{1+k_2 z}\right)\right] + \\
&+ z^2\left[\frac{A_{i1}}{1+k_1 z}\lambda_1 + \frac{A_{i2}}{1+k_2 z}\lambda_2 - \frac{A_{i6} k_1 k_2}{(1+k_1 z)(1+k_2 z)}\bar{\varepsilon}_{12}\right]; \\
&\sigma_{jj} = \frac{A_{j4}}{1+k_2 z}\bar{\varepsilon}_{23} + \frac{A_{j5}}{1+k_1 z}\bar{\varepsilon}_{13} + z\left[\frac{A_{j4}}{1+k_2 z}\vartheta_2 + \right. \\
&\left. + \frac{A_{j5}}{1+k_1 z}\vartheta_1\right] + z^2\left[\frac{A_{j4}}{1+k_2 z}\delta_2 + \frac{A_{j5}}{1+k_1 z}\delta_1\right],
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

где $i = 1,2,3,6$; $j = 4,5$; $\sigma_{66} \equiv \sigma_{12}$; $\sigma_{55} \equiv \sigma_{13}$; $\sigma_{44} \equiv \sigma_{23}$.

Модули упругости A_{pq} известным образом [5] находятся через "технические постоянные" ортотропного тела и угол армирования.

Поперечные (N_i) и тангенциальные (S_{ij} , Q_i) усилия, изгибающие (M_i) и крутящие (H_i) моменты, вводимые как и в классической теории оболочек, а также силовые факторы (M_i^* , P_i , P_i^*, N_3 , M_3^*), возникающие в результате обжатия нормального элемента, определяются по формулам

$$
\left.
\begin{aligned}
&N_i = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{ii,s}(1+zk_j)\,dz ; \quad S_{ij} = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{ij,s}(1+zk_j)\,dz ; \\
&Q_i = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{i3,s}(1+zk_j)\,dz ; \quad M_i = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{ii,s}\, z(1+zk_j)\,dz ; \\
&H_i = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{ij,s}\, z(1+zk_j)\,dz ; \quad M_i^* = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{ii,s}\, z^2(1+k_j z)\,dz ; \\
&P_i = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{i3,s}\, z(1+k_j z)\,dz ; \quad P_i^* = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{i3,s}\, z^2(1+k_j z)\,dz ;
\end{aligned}
\right\} \quad (8)
$$

$$
\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ S_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3^* \\ H_1 \\ H_2 \\ P_1 \\ P_2 \\ M_1^* \\ M_2^* \\ P_1^* \\ P_2^* \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 & C_{17} & C_{18} & C_{19} & C_{1,10} & C_{1,11} & 0 & 0 & C_{1,14} & C_{1,15} & 0 & 0 \\
C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 & C_{27} & C_{28} & C_{29} & C_{2,10} & C_{2,11} & 0 & 0 & C_{2,14} & C_{2,15} & 0 & 0 \\
C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 & C_{37} & C_{38} & C_{39} & C_{3,10} & C_{3,11} & 0 & 0 & C_{3,14} & C_{3,15} & 0 & 0 \\
C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 0 & 0 & C_{47} & C_{48} & C_{49} & C_{4,10} & C_{4,11} & 0 & 0 & C_{4,14} & C_{4,15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{35} & C_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{5,12} & C_{5,13} & 0 & 0 & C_{5,16} & C_{5,17} \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} & C_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{6,12} & C_{6,13} & 0 & 0 & C_{6,16} & C_{6,17} \\
C_{71} & C_{72} & C_{73} & C_{74} & 0 & 0 & C_{77} & C_{78} & C_{79} & C_{7,10} & C_{7,11} & 0 & 0 & C_{7,14} & C_{7,15} & 0 & 0 \\
C_{81} & C_{82} & C_{83} & C_{84} & 0 & 0 & C_{87} & C_{88} & C_{89} & C_{8,10} & C_{8,11} & 0 & 0 & C_{8,14} & C_{8,15} & 0 & 0 \\
C_{91} & C_{92} & C_{93} & C_{94} & 0 & 0 & C_{97} & C_{98} & C_{99} & C_{9,10} & C_{9,11} & 0 & 0 & C_{9,14} & C_{9,15} & 0 & 0 \\
C_{10,1} & C_{10,2} & C_{10,3} & C_{10,4} & 0 & 0 & C_{10,7} & C_{10,8} & C_{10,9} & C_{10,10} & C_{10,11} & 0 & 0 & C_{10,14} & C_{10,15} & 0 & 0 \\
C_{11,1} & C_{11,2} & C_{11,3} & C_{11,4} & 0 & 0 & C_{11,7} & C_{11,8} & C_{11,9} & C_{11,10} & C_{11,11} & 0 & 0 & C_{11,14} & C_{11,15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{12,5} & C_{12,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12,12} & C_{12,13} & 0 & 0 & C_{12,16} & C_{12,17} \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{13,5} & C_{13,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{13,12} & C_{13,13} & 0 & 0 & C_{13,16} & C_{13,17} \\
C_{14,1} & C_{14,2} & C_{14,3} & C_{14,4} & 0 & 0 & C_{14,7} & C_{14,8} & C_{14,9} & C_{14,10} & C_{14,11} & 0 & 0 & C_{14,14} & C_{14,15} & 0 & 0 \\
C_{15,1} & C_{15,2} & C_{15,3} & C_{15,4} & 0 & 0 & C_{15,7} & C_{15,8} & C_{15,9} & C_{15,10} & C_{15,11} & 0 & 0 & C_{15,14} & C_{15,15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{16,5} & C_{16,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{16,12} & C_{16,13} & 0 & 0 & C_{16,16} & C_{16,17} \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{17,5} & C_{17,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{17,12} & C_{17,13} & 0 & 0 & C_{17,16} & C_{17,17}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ W' \\ \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{23} \\ K_1 \\ K_2 \\ W'' \\ \tau_{12} \\ \tau_{21} \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}
\qquad (9)
$$

$$N_3 = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{33,s} (1+k_1 z)(1+k_2 z)\, dz ;$$

$$M_3^* = \sum_s \int_{-h}^{h} \sigma_{33,s}\, z\, (1+k_1 z)(1+k_2 z)\, dz .$$

После подстановки уравнения (7) в (8) получим связь между усилиями-моментами и компонентами деформации срединной поверхности в виде уравнения (9)
где C_{ij} - компоненты жесткости оболочки, зависящие от модулей упругости слоев, образующих оболочку, главных кривизн срединной поверхности и толщины оболочки.

Полученные уравнения (3), (4), (6), (7), (8), (9) можно рассматривать как исходные при изучении прочности и колебаний тонкостенных элементов конструкции ГТД, изготовляемых из композиционных материалов.

Литература

I. Кузнецов Н.Д., Веселов С.И., Степаненко Н.Д. Применение композиционных материалов в конструкции ГТД.-"Проблемы прочности", 1974, № 2.
2. *Naghdi P.M. „On the theory of thin elastic shells", „Quart. Appl. Math", v.14, N4, 1957.*
3. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л., Гостехиздат, 1948.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев, "Наукова думка", 1973.
5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1974.
6. Либреску Л. К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек. "Механика полимеров", Рига, 1975, №6; 1976, № I.