КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
ТРУДЫ, ВЫПУСК XXX, 1967 г.
Вибрационная прочность и надежность двигателей
и систем летательных аппаратов

Р. Н. СТАРОБИНСКИЙ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МАГИСТРАЛЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОТОКА ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Вопросы колебаний скорости и давления жидкости (газа) в трубопроводах занимают важное место при проектировании и доводке гидравлических и газовых коммуникаций различного рода машин и установок как с точки зрения повышения прочностной надежности машин, так и с точки зрения получения устойчивых систем автоматического регулирования с требуемыми характеристиками.

Наибольшие трудности, возникающие при анализе динамических характеристик систем, связаны, как правило, с анализом звеньев с распределенными параметрами. Особенно сложным является исследование динамических свойств магистралей переменной площади, по которой течет жидкость с переменными физическими свойствами (течение вблизи клапанов, течение при подогреве жидкости и т. п.). В таких сложных условиях методы, применяемые для расчета нестационарных процессов в трубопроводах простой конструкции, приводят к расчету настолько трудоемкому, что становятся практически неприемлемыми.

В частности, операционный метод решения уравнений гидромеханики позволяет лишь свести задачу к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Такое уравнение не имеет общего решения, выражаемого через квадратуры элементарных функций. Его надо искать численно, причем заново для каждого значения частоты.

Еще большие трудности возникают при анализе систем с распределенными параметрами, содержащих некоторое количество звеньев с сосредоточенными параметрами. Комплексное рассмотрение таких систем приводит к дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых в ряде точек обращаются в бесконечность.

Некоторые задачи для частных видов магистралей без потерь, с плавно меняющимися по определенному закону характеристиками были решены Ливурдовым [3].

Следует, однако, заметить, что точный расчет динамических характеристик систем в общем случае практически невозможен. В связи с этим большой интерес представляют приближенные методы, дающие правильное представление о поведении системы в определенном интересующем нас диапазоне (по частоте, амплитуде и т. п.) возмущений.

Ниже приводится приближенный метод построения частотных характеристик для гидравлических (газовых) магистралей самого общего вида, в том числе для систем с распределенными параметрами, содержащих сосредоточенные звенья. Рассматриваемое решение справедливо для самого общего случая движения вязкой сжимаемой жидкости с переменными физическими свойствами. Произведена оценка точности полученных решений.

Система линеаризованных дифференциальных уравнений, описывающая движение турбулентного потока вязкой сжимаемой жидкости с переменными физическими свойствами по трубопроводу переменного сечения, имеет вид [2]

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\lambda w_0}{fd_{\text{г}}}M+\frac{1}{f}\frac{\partial M}{\partial t}. \tag{1}$$

$$-\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{f}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Коэффициенты уравнений $\frac{\lambda w_0}{fd_{\text{г}}}$; $\frac{1}{f}$; $\frac{f}{a^2}$ зависят от координаты x

$$\frac{\lambda w_0}{fd_{\text{г}}}=\frac{2}{M_0}\frac{\partial \Delta p_0(x)}{\partial x}. \tag{2}$$

$\Delta p_0(x)$ — стационарный перепад давлений на участке (x_1, x).

Коэффициенты $\frac{\lambda w_0}{fd_{\text{г}}}$, $\frac{1}{f}$ и $\frac{f}{a^2}$ системы (1) положительны и могут произвольным образом меняться вдоль магистрали,

$$0\leqslant\left[\frac{\lambda w_0}{fd_{\text{г}}};\ \frac{1}{f};\ \frac{f}{a^2}\right]=\varphi(x)\leqslant\infty, \tag{3}$$

а их интегралы вида $\Phi(x)=\int\limits_{x_1}^{x}\varphi(\xi)\,d\xi$ — функции ограниченные, могущие иметь разрывы первого рода.

Естественно, представляется заманчивым получить решения дифференциальных уравнений (1) как функций указанных интегралов или конечных интегралов другого вида.

В работе [1] нами было получено приближенное решение системы дифференциальных уравнений для длинной электрической линии, аналогичной системе (1) именно в такой форме. Заметим, что примененный метод справедлив для самого общего случая движения жидкости в магистрали с утечками, например, в магистрали с пористой стенкой или при наличии стравливающего жиклера.

Введем интегральные параметры магистрали, связанные с «первичными» соотношениями

$$R(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{2}{M_0} \frac{\partial \Delta p(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \frac{2}{M_0} \Delta p(x),$$

$$L(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{d\xi}{f} \cdot \tag{4}$$

$$C(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{f d\xi}{a^2} = \int_{x_1}^{x} \frac{1}{a^2} dV.$$

Здесь $R(x) = \frac{2}{M_0} \Delta p_0(x)$ — интегральное сопротивление магистрали, характеризующее необратимые потери на участке (x_1, x),

$$R(x) = \frac{\partial \Delta p_0(x)}{\partial M_0} \quad \text{при } \frac{\partial M}{\partial t} = 0;$$

$L(x)$ — интегральная индуктивность магистрали, характеризующая силы, необходимые для разгона жидкости на участке (x_1, x), как единое целое.

$$L(x) \frac{dM}{dt} = \Delta p_{\text{инерц}},$$

для $f = \mathrm{const}$

$$L(x) = \frac{x - x_1}{f};$$

$C(x)$ — интегральная параллельная емкость магистрали, характеризующая сжимаемость жидкости на участке (x_1, x), т. е. увеличение массы жидкости при изменении давления

$$\delta M = C(x)\, \delta p$$

для $a = \mathrm{const}$ $C(x) = \frac{V(x)}{a^2}$.

Будем интегрировать систему (1) при граничных условиях: при $x = x_1$

$$p = p(x_1, t) \quad M = M(x_1, t). \tag{5}$$

После применения преобразования Лапласа система (1) при граничных условиях (5) сводится [1] к интегральному матричному уравнению

$$\|B\|(x, s) = \|1\| - \int_{x_1}^{x} d\,\|\cdot\|\,\|B\|(x, s). \tag{6}$$

Здесь $\|B\|(x, s)$ — квадратная «цепочечная» матрица, связывающая переменные в произвольном (x) и начальном (x_1) сечениях магистрали и плотностью характеризующая ее передающие свойства.

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{p} \\ \tilde{M} \end{matrix} \right\| (x, s) = \| B \| (x, s) \left\| \begin{matrix} \tilde{p} \\ \tilde{M} \end{matrix} \right\| (x_1, s), \tag{7}$$

$\| A \|$ — матрица, составленная из интегральных характеристик магистрали

$$\| A \| = \left\| \begin{matrix} 0 & R + Ls \\ Cs & 0 \end{matrix} \right\| . \tag{8}$$

Система (6) может быть проинтегрирована итерационным методом. Решение для n-ного приближения определяется по рекуррентной формуле (9)

$$\| B \|_{n+1} = \| 1 \| - \int_{x_1}^{x} d \, \| A \| \, \| B \|_n \tag{9}$$

и может быть представлено в виде сходящихся рядов [1]

$$\| B \|_n = \| B \|_1 + \sum_{k=2}^{n} \| b \|_k, \tag{10}$$

где

$$\| b \|_{k+1} = - \int_{x_1}^{x} d \, \| A \| \, \| b \|_k . \tag{11}$$

$$\| b \|_1 = \| B \|_1 - \| B \|_0 . \tag{12}$$

$\| B \|_1$ — определяется по формуле (9).

В качестве начального приближения $\| B \|_0$ может быть принята «цепочечная» матрица любого приближенного решения уравнений (1). В частности, в качестве «начального» можно использовать известное [2] решение уравнений (1) для магистрали с равномерно распределенными параметрами, считая интегральные характеристики магистрали равномерно распределенными по ее длине, т. е. $C(x)$; $R(x)$; $L(x) \sim (x - x_1)$, решение для стационарного потока и др.

Во многих случаях, особенно при небольших частотах колебаний потока жидкости в магистрали, целесообразно принять

$$\| B \|_0 = \| 1 \| . \tag{13}$$

При этом, при рассмотрении частотных характеристик решение (10) уравнений (6) является функцией вида

$$\| B \|_n (x, iu) = \sum_{k=0}^{n} \| \alpha \|_k (i\omega)^k, \tag{14}$$

коэффициенты $\| \alpha \|_k (x)$ не зависят от ω. Такая форма решения значительно уменьшает объем вычислений (сводящихся в данном случае к определению этих коэффициентов для всего исследуемого диапазона частот), делает результаты расчетов легко обозримыми и упрощает их анализ. В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай ($\| B \|_0 = \| 1 \|$).

В этом случае решение уравнений (6) будет иметь особенно простую форму

$$\| B \|_n = \sum_{k=0}^{n} \| b \|_k, \tag{15}$$

где

$$\| b \|_0 = \| 1 \| , \tag{16}$$

а $\| b \|_k$ определяются по формуле (11).

Нетрудно показать, что при стремлении ($n \to \infty$) решение (10) совпадает с (15) и не зависит от вида $\|B\|_0$

$$\|B\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|b\|_k . \tag{17}$$

Для $\| B \|_0 = \| 1 \|$ имеют место [1] следующие формулы для определения элементов матрицы $\| B \|_n$

$$B_{jk,n} = \sum_{m=0}^{n} b_{jk,m}, \tag{18}$$

$$\text{где } b_{21,m} = -\int_{x_1}^{x} b_{11,m}\, dA_{21}; \quad b_{11,m+1} = -\int_{x_1}^{x} b_{21,m}\, dA_{12}; \tag{19}$$

$$b_{12,m} = -\int_{x_1}^{x} b_{22,m}\, dA_{12}; \quad b_{22,m+1} = -\int_{x_1}^{x} b_{12,m}\, dA_{21}; \tag{20}$$

$$A_{12} = R + Ls; \quad A_{21} = Cs; \tag{21}$$

$$b_{11,0} = 1; \quad b_{22,0} = 1.$$

При рассмотрении гармонических колебаний в магистрали принимается $s = i\omega$.

Из уравнений (19)—(21) последовательно находятся все чле-

Фиг. 1.

ны рядов (18). Интегрирование может производиться любым доступным методом, координата (x) используется как параметр. Для $\| B \|_0 \| 1 \|$ при интегрировании частота ($i\omega$) выносится за знак интеграла. При этом матрица $\| B \|_n$ принимает вид (11).

Схема последовательного нахождения членов рядов (18) приведена на фиг. 1.

$$b_{22,0} = 1 \quad b_{12,0} = -\int_{x_1}^{x} d(R + i\omega L) = -(R + i\omega L).$$

$$b_{22,1} = i\omega \int^{x} RdC + (i\omega)^2 \int_{x_1}^{x} LdC$$

Откуда

$$B_{22} = 1 + i\omega \int_{x_1}^{x} RdC + (i\omega)^2 \int_{x_1}^{x} LdC + \ldots$$

$$B_{12} = -R - i\omega L - \ldots$$

Оценка величины остаточного члена рядов (18)

Ввиду того, что модуль $\Phi(\xi)$ [$A_{21}(\xi)$ и $A_{12}(\xi)$] достигает максимального значения при $\xi = x$ для функций $A_{21} = i\omega C$ и $A_{12} = R + i\omega L$, справедливо следующее неравенство

$$\left| \int_{x_1}^{x} \Phi(\xi)\, d\xi \right| \leqslant |\Phi(x)(x - x_1)| \,. \tag{22}$$

С учетом (22) можно показать, что ряды (18) могут быть мажорированы рядами типа

$$I_0(2i\Theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Theta^j}{j!} \right)^2, \tag{23}$$

где $I_0(2i\Theta)$ — Бесселева функция нулевого порядка первого рода.
$\Theta = \left| \sqrt{i\omega C(R + i\omega L)} \right|$ — абсолютное значение меры передачи магистрали, по которой равномерно распределены ее интегральные характеристики.

Введем три системы оценки остаточного члена

$$\Delta_{jk} = | B_{jk} - B_{jk,\, n} | \,. \tag{24}$$

1. По величине остаточного члена мажорирующих рядов

$$\text{для } r = k \quad \Delta_{rk,\, n} \leqslant | b_{rk,0} | \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{\Theta^j}{j!} \right)^2, \tag{25}$$

$$\text{для } r \neq k \quad \Delta_{rk,\, n} \leqslant | b_{rk,0} | \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j+1} \left(\frac{\Theta^j}{j!} \right)^2.$$

2. По величине последнего члена рядов

$$\Delta_{jk,\, n} \leqslant \max | b_{jk,\, n} | \{ I_0(2i\Theta) - 1 \}. \tag{26}$$

3. По величине последнего приближения

$$\Delta_{jk,\,n} \leqslant \max \mid B_{jk,\,n} - B_{jk,0} \mid \{T_n(\Theta) - 1\}. \qquad (27)$$

$$T_n(\Theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Theta^{nj}}{nj!}\right)^2 \text{ для } n = 1 \quad T_1(\Theta) = I_0(2i\Theta).$$

Суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Theta^{nj}}{nj!}\right)^2$

Таблица 1

Θ \ n	1	2	3	4	5	n / Θ
0,1	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000	0,1
0,2	0,040	0,000	0,000	0,000	0,000	0,2
0,3	0,092	0,002	0,000	0,000	0,000	0,3
0,4	0,167	0,006	0,000	0,000	0,000	0,4
0,5	0,266	0,016	0,000	0,000	0,000	0,5
0,6	0,394	0,032	0,001	0,000	0,000	0,6
0,7	0,553	0,060	0,003	0,000	0,000	0,7
0,8	0,750	0,103	0,007	0,000	0,000	0,8
0,9	0,990	0,165	0,015	0,001	0,000	0,9
1,0	1,280	0,252	0,028	0,002	0,000	1,0
1,1	—	0,370	0,049	0,004	0,000	1,1
1,2	—	0,526	0,083	0,007	0,000	1,2
1,3	—	0,728	0,134	0,014	0,001	1,3
1,4	—	0,986	0,209	0,026	0,002	1,4
1,5	—	1,310	0,317	0,044	0,004	1,5

Суммы рядов $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{\Theta^{j}}{j!}\right)^2$

Таблица 2

Θ \ n	1	2	3	4	n / Θ
0,1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,1
0,2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,2
0,3	0,002	0,000	0,000	0,000	0,3
0,4	0,006	0,000	0,000	0,000	0,4
0,5	0,016	0,000	0,000	0,000	0,5
0,6	0,033	0,001	0,000	0,000	0,6
0,7	0,063	0,003	0,000	0,000	0,7
0,8	0,110	0,007	0,000	0,000	0,8
0,9	0,180	0,015	0,001	0,000	0,9
1,0	0,280	0,030	0,002	0,000	1,0
1,1	0,418	0,053	0,004	0,000	1,1
1,2	0,610	0,091	0,008	0,000	1,2
1,3	0,862	0,149	0,015	0,001	1,3
1,4	1,197	0,237	0,028	0,002	1,4
1,5	—	0,355	0,049	0,004	1,5

Суммы рядов $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+j}\left(\frac{\Theta^j}{j!}\right)$

Таблица 3

Θ \ n	0	1	2	3	4	n / Θ
0,1	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,1
0,2	0,020	0,000	0,000	0,000	0,000	0,2
0,3	0,046	0,001	0,000	0,000	0,000	0,3
0,4	0,082	0,002	0,000	0,000	0,000	0,4
0,5	0,130	0,005	0,000	0,000	0,000	0,5
0,6	0,191	0,011	0,000	0,000	0,000	0,6
0,7	0,266	0,021	0,001	0,000	0,000	0,7
0,8	0,356	0,036	0,002	0,000	0,000	0,8
0,9	0,463	0,058	0,004	0,000	0,000	0,9
1,0	0,590	0,090	0,007	0,000	0,000	3,0
1,1	0,739	0,134	0,012	0,001	0,000	1,1
1,2	0,915	0,195	0,022	0,002	0,000	1,2
1,3	1,119	0,274	0,036	0,003	0,000	1,8
1,4	—	0,378	0,053	0,006	0,000	1,4
1,5	—	0,508	0,089	0,010	0,001	1,5

Формулы (25) могут быть применены для предварительной оценки. Формулы (26), (27) применяются для оценки погрешности на каждом этапе вычислений. Из трех оценок (25), (26), 27) следует выбрать ту, которая дает наименьшее значение Δ_n.

Оценка остаточных членов для рядов (10) (при $\| B \|_0 \neq \| 1 \|$) может быть произведена по аналогичным формулам [1].

Ряды (25) и (27) табулированы. Значения их сумм приведены в табл. 1, 2, 3.

Рассмотренный выше метод решения дифференциальных уравнений может быть применен и к магистралям с сосредоточенными параметрами и имеет по сравнению с другими методами то преимущество, что позволяет оценить погрешность вычислений при приближенных методах решения для весьма сложных систем, не зная точного решения, тогда как при обычных методах такая оценка в общем случае невозможна.

Интегрирование дифференциальных уравнений для магистралей с источниками

Выше были рассмотрены методы интегрирования дифференциальных уравнений для «пассивных» магистралей, т. е. для магистралей без источников энергии. Однако во многих задачах возникает необходимость анализа динамических явлений в магистралях с распределенными источниками. Такие задачи возникают, например, при движении летательного аппарата в переменном поле массовых сил или при изменении формы проточной части жидкостного тракта под действием внешней возмущающей силы. Рассмотренный выше метод может быть применен и к таким задачам.

Линеаризованные дифференциальные уравнения для этих случаев имеют вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\lambda w_0}{f d_{\text{г}}} M + \frac{1}{f}\frac{\partial M}{\partial t} - \rho\psi(x, t),$$

$$-\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{j}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\,\frac{\partial^2 V(x_1 t)}{\partial x \partial t}, \tag{28}$$

где $\psi(x, t)$ — характеризует напряженность поля массовых сил в направлении оси x;

$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x \partial t}$ — характеризует изменение объема трубопровода.

Следует отметить, что к подобным уравнениям сводятся задачи и с некоторыми другими типами внешних возмущений.

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что решение системы (28) может быть представлено в виде суммы общего (при $\psi(x, t) = 0$ и $\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x \partial t} = 0$) и частного (при произвольных граничных условиях). Общее решение было рассмотрено выше, оно может быть найдено, и любым другим методом. В качестве частного примем решение при

$$p(x_1, t) = 0. \quad M(x_1, t) = 0. \tag{29}$$

При таких граничных условиях система (28) может быть приведена к матричному интегральному уравнению (30).

$$\| E \| (x, s) = \rho \left\| \begin{matrix} \widehat{\Psi} \\ -s\widetilde{V} \end{matrix} \right\| (x, s) - \int_{x_1}^{x} d\,\|A\|\,\|E\|\,(x, s), \tag{30}$$

где $\|E\|(x, s)$ — искомое частное решение;

$\widehat{\Psi}(x, s) = \int_{x_1}^{x} \widetilde{\Psi}(\xi, s)\,d\xi$ — интегральная массовая сила на участке (x_1, x).

Функции $\Psi(x, s)$ и $V(x, s)$ могут иметь конечное число точек разрыва первого рода (т. е. источники могут быть и сосредоточенными).

Решение $\|E\|$ может быть найдено в форме (10) — (12) подстановкой $\|E\|$ и $\|e\|$ вместо $\|B\|$ и $\|b\|$ соответственно.

$$\|E\|_1 = \rho \left\| \begin{matrix} \widehat{\Psi} \\ -s\widetilde{V} \end{matrix} \right\| (x, s) - \int_{x_1}^{x} d\,\|A\|\,\|E\|_0. \tag{31}$$

За начальное приближение целесообразно принять

$$\|E\|_0 = \rho \left\| \begin{matrix} \widehat{\Psi} \\ -s\widetilde{V} \end{matrix} \right\| (x, s). \tag{32}$$

В этом случае

$$\|E\|_n = \sum_{k=0}^{n} \|e\|_k, \tag{33}$$

где

$$\|e\|_0 = \|E\|_0. \tag{34}$$

Решение $\|E\|$ можно разбить на $\|E\|_\Phi$ и $\|E\|_V$, учитывающие характер источников. При этом схема определения $\|E\|_\Phi$ совпадает со схемой определения B_{21} и B_{11}, а $\|E\|_V$—с B_{12} и B_{22} (схема 1), аналогично определяется и точность приближений (25)—(27)

Например,

$$\Delta_{jk,\,n} \leqslant \max |e_{jk,\,n}| \, \{I_0(2i\Theta) - 1\} \text{ и т. п.}$$

ВЫВОДЫ

В статье рассмотрен метод приближенного расчета частотных характеристик магистралей переменной площади, по которой течет жидкость с переменными физическими свойствами. Предлагаемый метод позволяет получить решения для магистрали, содержащей разрывы физических параметров потока. Предложена методика оценки точности результатов на каждом этапе вычислений, что позволяет избежать повторных расчетов, связанных с недостаточной точностью предварительных вычислений.

Кроме частотных характеристик, полученные результаты могут быть использованы для построения эквивалентных расчетных схем магистралей, эквивалентных электрических и механических моделей*.

Метод оценки частотных характеристик по интегральным параметрам может быть также применен к задачам синтеза оптимальных систем регулирования, к теории оптимального фильтра и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Старобинский. «К вопросу об интегрировании дифференциальных уравнений «неоднородной» линии с распределенными параметрами». «Радиоэлектроника в народном хозяйстве». Сборник трудов НТОРИЭ им. Попова, Куйбышев, 1966.

2. И. А. Чарный. «Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах». Госиздат ТТЛ, Москва—Ленинград, 1951.

3. З. Ливурдов. «Неустановившееся движение жидкости в трубах с переменным и постоянным поперечным сечением». Докторская диссертация. Акад. им. Дзержинского. Москва, 1963.

---

* См. статью Р. Н. Старобинского «Схематизация физических явлений в гидравлических магистралях на основе интегральных характеристик потока». Настоящий сборник, стр. 189.