

И. Д. ЭСКИН

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ
И УПРУГО-ГИСТЕРЕЗИСНОЙ ПЕТЛЕЙ
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

Опубликованные решения задачи о свободных колебаниях упруго-гистерезисных систем [1]-[3] справедливы лишь в диапазоне достаточно малых затуханий. Только для систем с одной степенью свободы, имеющих упруго-гистерезисную петлю в форме параллелограмма получено точное решение методом припасовывания [4]. Результаты, полученные в [4], громоздки, плохо поддаются анализу.

В последнее время задача, рассмотренная в [4] точно решена методом, основанным на применении теоремы об изменении кинетической энергии [5].

Авторами получены простые соотношения, позволившие провести качественный анализ процесса затухания колебаний.

В настоящей работе этим же методом решается более общая задача о свободных колебаниях упруго-гистерезисных систем с одной степенью свободы, в процессе колебаний которых обобщенная сила внутреннего сопротивления является функцией только обобщенного перемещения и наибольшего (наименьшего) отклонения системы в начале рассматриваемого размаха и зависимость обобщенной силы сопротивления от перемещения представлена непрерывной или кусочно-непрерывной функцией $Q(x, \rho)$. Полученные результаты справедливы при любой интенсивности затухания.

§ 1. Постановка задачи и метод расчета. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$; система находится в точке с координатой ρ_0 и обобщенная скорость системы в этой точке $\dot{x}_0 = 0$.

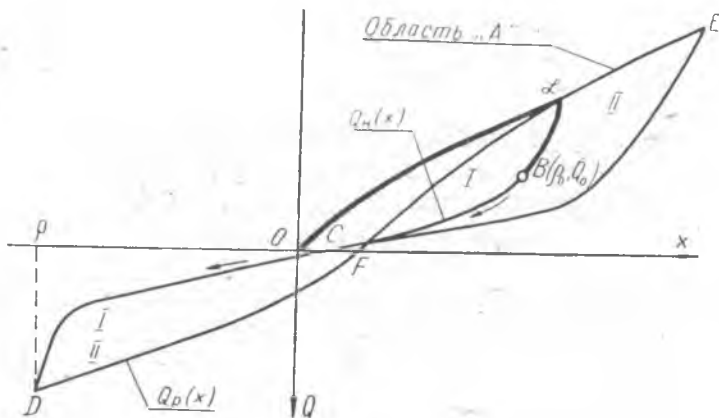
В координатах $Q - x$ начальное положение системы изображается точкой $B(\rho_0, \dot{Q}_0)$. Обобщенное перемещение x и обобщенная сила внутреннего сопротивления Q отсчитываются от ненагруженного

положения системы. Кинетическая энергия системы выражается равенством

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2, \quad (\dot{x} = \frac{dx}{dt}), \quad (a)$$

где M — обобщенная масса.

В качестве начального положения системы в координатах $Q - x$ может быть выбрана любая точка $B(\rho_0, \bar{Q}_0)$, в которую известными загрузочными процессами может быть приведена система (см. про-



Фиг. 1.

цесс OLB фиг. 1). Отметим, что в данное начальное положение $B(\rho_0, \bar{Q}_0)$ система может быть приведена различными комбинациями загрузочных процессов.

Но для исследуемых в практических приложениях систем с «внутренним» трением, с «конструкционным демпфированием», с демпферами из различных упруго-гистерезисных материалов [6], [7], [8] загрузочный процесс при последующем колебательном движении системы из начального положения $B(\rho_0, \bar{Q}_0)$ не зависит от комбинации загрузочных процессов, приведших систему в эту точку, а полностью определяется координатами начального положения ρ_0, \bar{Q}_0 , системой и направлением первого движения системы из этой точки.

Направление первого движения системы из начального положения определено законом обобщенного ускорения системы в этой точке

$x_0 = \frac{-\bar{Q}_0}{M}$. Следовательно, загрузочный процесс на первом размахе системы может быть построен, т. к. известна (получена статическим исследованием) упруго-гистерезисная петля I системы (см. рис. 1), один из загрузочных процессов которой проходит через

точку $B(\rho_0, \overline{Q_0})$ и на отрезке $[\rho_0, \rho_1]$ совпадает с загрузочным процессом на первом размахе системы и для которой справедливо неравенство

$$\left| \int_B^C Q_n(x) dx \right| < \left| \int_C^D Q_n(x) dx \right|. \quad (b)$$

Следовательно, на основании теоремы об изменении кинетической энергии справедливо неравенство:

$$\rho_1 > \rho, \quad (c)$$

где ρ_1 — наибольшее (наименьшее) отклонение системы в конце первого размаха и ρ — координата вершины D петли I (см. рис. 1). Пусть в координатах $Q-x$ задана также область A , ограниченная петлей гистерезиса II, охватывающей петлю I. И для петли II справедливо неравенство (см. фиг. 1).

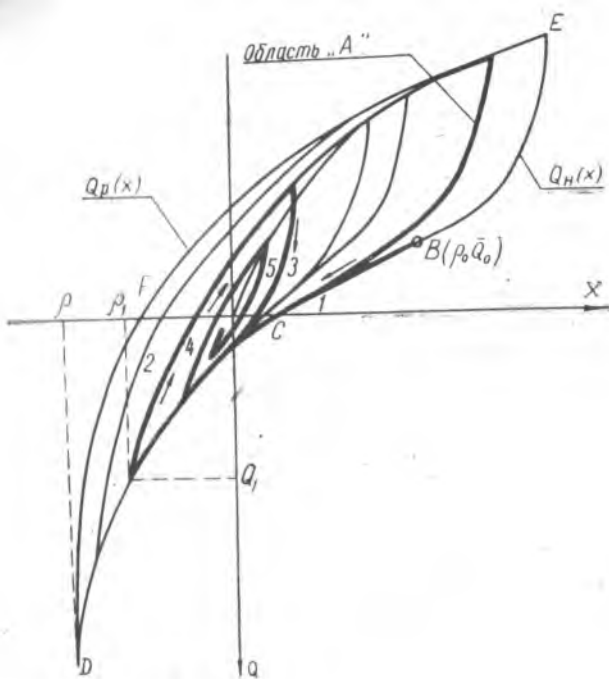
$$\left| \int_D^F Q_p(x) dx \right| < \left| \int_F^E Q_p(x) dx \right|. \quad (d)$$

Тогда на основании (b), (c), (d) можно утверждать, что все загрузочные процессы, происходящие при свободных колебаниях системы от момента начала движения до момента полной остановки системы, лежат внутри и на границе области A . Отметим, что в большинстве практически важных случаев возможно построить петлю, у которой один из загрузочных процессов проходит через точку $B(\rho_0, \overline{Q_0})$ и на отрезке $[\rho_0, \rho_1]$ совпадает с загрузочным процессом на первом размахе системы и для которой справедливы неравенства (см. фиг. 2).

$$\left| \int_B^C Q_n(x) dx \right| < \left| \int_C^D Q_n(x) dx \right|, \\ \left| \int_D^F Q_p(x) dx \right| < \left| \int_F^E Q_p(x) dx \right|. \quad (e)$$

В частном случае точка $B(\rho_0, \overline{Q_0})$ может быть вершиной этой петли. В этом случае все загрузочные процессы, происходящие при свободных колебаниях, будут также лежать внутри и на границе области A , ограниченной этой петлей.

Пусть в области A теоретически или экспериментально построено такое семейство упруго-гистерезисных петель, что среди петель семейства всегда можно выбрать петлю, у которой один из загрузочных процессов на отрезке $[\rho_{d-1}, \rho_d]$ будет совпадать с загрузочным процессом на d -ом размахе. Тогда, зная зависимость $Q_1(x, \rho_0)$ на первом размахе, с помощью теоремы об изменении кинетической энергии можно определить координаты точки наибольшего (наименьшего) отклонения системы на первом размахе — $\rho_1, \overline{Q_1}$; зная начальное положение системы на втором размахе (точку $(\rho_1, \overline{Q_1})$) и направление движения из этого положения,



Фиг. 2.

определяемое знаком обобщенного ускорения $\ddot{x}_1 = \frac{\bar{Q}_1}{M}$, — можно определить $Q_2(x, \rho_1)$, выбрав в области A упруго-гистерезисную петлю, у которой загрузочный процесс из точки (ρ_1, \bar{Q}_1) на отрезке $[\rho_1, \rho_2]$ будет совпадать с загрузочным процессом второго размаха. Зная зависимость $Q_2(x, \rho_1)$, можно определить координаты положения наибольшего (наименьшего) отклонения на втором размахе — $\rho_2 \bar{Q}_2$. Повторяя этот процесс нужное число раз, найдем все загрузочные процессы и координаты положений наибольшего (наименьшего) отклонения на всех рассматриваемых размахах системы.

Загрузочный процесс из точки $(\rho_{d-1}, \bar{Q}_{d-1})$ в точку (ρ_d, \bar{Q}_d) будем называть нагруженным, если он протекает с увеличением обобщенной силы внутреннего сопротивления и уменьшением величины обобщенного перемещения, или, по крайней мере, такой процесс, у которого $\rho_d < \rho_{d-1}$, $\bar{Q}_d > \bar{Q}_{d-1}$. Разгрузочным процессом будем называть загрузочный процесс, протекающий с уменьшением обобщенного внутреннего сопротивления и увеличением обобщенного перемещения или, по крайней мере, такой процесс, у которого $\rho_d > \rho_{d-1}$, $\bar{Q}_d < \bar{Q}_{d-1}$.

Присвоим размахам системы, соответствующим нагрузочным процессам, нечетные номера $d = 1, 3, 5, \dots$, а размахам, соответствующим разгрузочным процессам, — четные номера $d = 2, 4, 6, 8, \dots$ (см. фиг. 2).

Ниже рассмотрим любой d -ый размах системы.

Полученные соотношения будут справедливы для всех размахов системы. Основываясь на вышесказанном, координаты начального положения ρ_{d-1} , \overline{Q}_{d-1} и загрузочный процесс $Q_d(x, \rho_{d-1})$ системы на d -ом размахе будем считать известными.

Разбив кривую зависимости $Q_d(x, \rho_{d-1})$ на k участков ($k = 1, 2, 3, \dots, r$), аппроксимируем ее в пределах каждого участка интерполяционным полиномом, причем границы участков будут интерполяционными узлами с координатами q_k, Q_k .

Будем говорить, что k -ому участку процесса загрузки системы соответствует k -ый этап движения системы на d -ом размахе.

Текущее значение перемещения системы на k -ом этапе d -ого размаха обозначим x_k .

Тогда согласно теореме об изменении кинетической энергии для k -ого этапа, d -ого размаха движения системы можно записать:

$$\dot{x}_k^2(t) = \frac{2}{M} \int_{\rho_{d-1}}^{x_k} Q_d(x_k, \rho_{d-1}) dx_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, m; \quad m \leq r \quad (1.1)$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

Наибольшее (наименьшее) отклонение системы на d -ом размахе ρ_d определяется из уравнения

$$\frac{M}{2} \dot{x}_m(T_d) = \int_{\rho_{d-1}}^{\rho_d} Q_d(x_m, \rho_{d-1}) dx_m = 0 \quad (1.2)$$

$$d = 1, 2, 3, 4, \dots$$

где T_d — время движения системы на d -ом размахе и

$$(-1)^d q_{m-1} \leq (-1)^d \rho_d \leq (-1)^d q_{m,d}, \quad d = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.3)$$

как наименьший по абсолютной величине действительный корень уравнения (1.2).

Номер m последнего этапа d -ого размаха определяется из условий

$$\int_{\rho_{d-1}}^{q_{m-1,d}} Q_d(x_{m-1}, \rho_{d-1}) dx_{m-1} \geq 0; \quad \int_{\rho_{d-1}}^{q_m} Q_d(x_m, \rho_{d-1}) dx_m \leq 0 \quad (1.4)$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

Время движения на d -ом размахе определяется из равенства

$$T_d = \sum_{k=1}^{k=m-1} \int_{q_{k-1,d}}^{q_{k,d}} \frac{dx_k}{\sqrt{\frac{2}{M} \int_{\rho_{d-1}}^{x_k} Q_d(x_k, \rho_{d-1}) dx_k}} +$$

$$+ \int_{q_{m-1}}^{\rho_d} \frac{x_m}{M} \frac{dx_m}{\int_{\rho_{d-1}}^{x_m} Q_d(x_m, \rho_{d-1}) dx_m} \quad (1.5)$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

В общем случае, аппроксимируя вышеуказанным способом подинтегральную функцию $Q_d(x, \rho_{d-1})$ на отрезке $[\rho_{d-1}, q_d]$, мы сведем уравнение (1. 2) к алгебраическому или трансцендентному уравнению относительно ρ_d . Это уравнение известными способами может быть решено, а квадратура (1,5) вычислена.

Подставив в выражение функции $Q_d(x_m, \rho_{d-1})$, найденное из (1.2) значение ρ_d , получим вторую координату начального положения системы \bar{Q}_d , на $d + 1$ -ом размахе.

Ниже рассматривается практически важная задача о свободных колебаниях системы с одной степенью свободы, упруго-гистерезисная петля которой ограничена полигоном, составленным из n отрезков.

Полученные здесь результаты остаются справедливыми и для общего случая, если в качестве аппроксимирующей функции $Q_d(x, \rho_{d-1})$ выбирается вышеуказанная ломаная.

Как и выше, рассмотрим d -ый размах колебания системы. Координаты начального положения ρ_{d-1} ; \bar{Q}_{d-1} и загрузочный процесс $Q_d(x, \rho_{d-1})$ системы будем считать известными и следовательно заданными координаты q_{kd} Q_{kd} , вершин и тангенс угла наклона C_{kd} k -ого отрезка полигона на d -ом размахе. Тогда уравнение k -ого отрезка полигона на d -ом размахе запишется в виде

$$Q_d(x_k) = (x_k - q_{kd}) C_{kd} + Q_{kd}, \quad (1.6)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

Запишем теорему об изменении кинетической энергии в форме:

$$\dot{x}_{kd}^2(t) = \omega_{kd}^2 \psi_{kd}(x_k) \quad (1.7)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$d = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\psi_{kd}(x_k)$ определяются рекуррентным соотношением

$$\omega_{kd}^2 \psi_{kd}(x_k) = \omega_{k-1, d}^2 \psi_{k-1, d}(q_{k-1, d}) + \frac{2}{M} \int_{q_{k-1, d}}^{x_k} Q_d(x_k) dx_k \quad (1.8)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m; \quad d = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_{0d}(\rho_{d-1}) = 0; \quad \omega_{kd}^2 = -\frac{C_{kd}}{M};$$

Подставив (1.6) и (1.8) и проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} \phi_{kd}(x_k) &= \frac{C_{k-1,d}}{C_{kd}} \phi_{k-1,d}(q_{k-1,d}) + \\ &+ \frac{2}{C_{kd}} (x_k - q_{k-1,d}) \left[C_{kd} \left(q_{kd} - \frac{x_k + q_{k-1,d}}{2} \right) - Q_{kd} \right] \\ &k = 1, 2, 3, \dots, m; d = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\phi_{1,d}(q_{k-1,d}) = \frac{2}{C_{k-1,d}} \sum_{n=1}^{n=k-1} (q_{nd} - q_{n-1,d}) \left(C_{nd} \frac{q_{nd} - q_{n-1,d}}{2} - Q_{nd} \right).$$

Система может достигнуть положения q_d^* , если $\phi_{kd}(q_d^*) \geq 0$, причем $x_k = 0$ там, где $\phi_{kd}(x_k) = 0$. Учитывая вышесказанное об определении направления последующего движения в положениях, где $x_k = 0$, приходим к следующим выводам: система пройдет положение q_d^* лишь при условии

$$0 < \left(q_{1d} \rho_{d-1} - 2 \frac{Q_{1d}}{C_{1d}} \right) (q_{1d} - \rho_{d-1}) \quad (1.10)$$

$d = 1, 2, 3, \dots$

Если $0 \geq \left(q_{1d} - \rho_{d-1} - 2 \frac{Q_{1d}}{C_{1d}} \right) (q_{1d} - \rho_{d-1})$, то на 1-ом этапе d -ого размаха скорость обращается в 0 не только в точке $x_1 = \rho_{d-1}$, но и в точке

$$q_d^* = 2B_{1d} - \rho_{d-1}, \quad \text{где } B_{1d} = q_{1d} - \frac{Q_{1d}}{C_{1d}}. \quad (1.11)$$

Отметим здесь два возможных случая:

1. Когда система не рассеивает энергию на 1-ом этапе d -ого размаха*.

2. Когда система рассеивает энергию на 1-ом этапе d -ого размаха.

В первом случае система будет совершать незатухающие колебания, постоянно сохраняя первый этап движения $(-1)^d \rho_{d-1} \leq x_1 \leq (-1)^d q_d^*$. Эти колебания происходят не около ненагруженного положения системы, а около положения

$$q_{1d}^{(0)} = B_{1d}, \quad (1.12)$$

причем амплитуда колебаний определяется равенством

$$a_{1d} = |\rho_{d-1} - B_{1d}|. \quad (1.13)$$

* Такой вид зависимости $Q_d(x_k)$ имеет демпфирующие и амортизирующие устройства, выполненные в виде многослойных пакетов с сухим трением на контактных поверхностях с постоянной либо переменной равномерной сдвигивающей нагрузкой между слоями пакета и нагруженные циклической сосредоточенной силой.

Во втором случае система от положения q_d^* начнет новый $d+1$ -ый размах с нового первого этапа (см. фиг. 2) и будет совершать затухающие колебания либо до полной остановки, если на всех дальнейших этапах движения она рассеивает энергию, либо до какого-то этапа, на котором нет рассеивания и на котором при дальнейшем движении система будет постоянно оставаться, совершая незатухающие колебания с амплитудой (1.13) около положения (1.12).

Рассматриваемый метод не позволяет точно определить моменты полной остановки системы. При рассмотрении движения на фазовой плоскости при бесконечном уменьшении амплитуды колебаний изображающая точка будет стремиться к некоторому устойчивому фокусу, который изображает положение полной остановки системы.

В практических случаях можно рассматривать конечное число размахов, обеспечивающее выполнение условия $a_s < \eta$, где a_s — амплитуда перемещения в конце последнего s -ого размаха и η — заданная положительная величина.

В случае выполнения неравенства (1.10) система пройдет положение q_{1d} и вступит в следующий этап движения. В зависимости от начальных условий рассматриваемого d -ого размаха скорость может обратиться в 0 на любом дальнейшем m -ом этапе. Наибольшее (наименьшее) отклонение системы в конце d -ого размаха ρ_d найдется как наименьший по абсолютной величине корень квадратного уравнения $\phi_{md}(x_m) = 0$

$$\rho_d = B_{md} \pm \sqrt{\phi_{md}(q_{md}) + \frac{Q_{md}^2}{C_{md}^2}} \quad (1.14)$$

$$d = 1, 2, 3, \dots,$$

причем

$$(-1)^d q_{m-1, d} \leq (-1)^d \rho_d \leq (-1)^d q_{md}$$

и номер m определяется из условий

$$\phi_{m-1, d}(q_{m-1, d}) \geq 0 \text{ и } \phi_{md}(q_{md}) \leq 0, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \phi_{md}(q_{md}) &= \frac{C_{m-1, d}}{C_{md}} \phi_{m-1, d}(q_{m-1, d}) + (q_{md} - q_{m-1, d})(q_{md} - \\ &- q_{m-1, d} - 2 \frac{Q_{md}}{C_{md}}) = \frac{2}{C_{md}} \sum_{n=1}^{n=m} (q_{nd} - q_{n-1, d}) \left(C_{nd} \frac{q_{n, d} - q_{n-1, d}}{2} - Q_{nd} \right) \end{aligned}$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

Далее из (1.7) получаем соотношения, определяющие поведение системы во времени.

Промежуток времени, за который система переместится из положения $q_{k-1,d}$ в положение x_k , на k -ом этапе движения системы определится из равенства

$$\begin{aligned}
 t - i_{k-1,d} &= \frac{1}{\omega_{kd}} \int_{q_{k-1,d}}^{x_k} \frac{dx_k}{\sqrt{a_{kd} x_k^2 + b_{kd} x_k + l_{kd}}} = \\
 &= \frac{1}{\omega_{kd}} \int_{q_{k-1,d}}^{x_k} \frac{dx_k}{\sqrt{a_{kd} x_k^2 + b_{kd} x_k + l_{kd}}} \quad (1.16) \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, m \\
 d &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

В исследуемом случае $a_{kd} = -1$. Докажем, что $\Delta_{kd} = 4a_{kd}e_{kd} - b_{kd}^2 < 0$ для k -ого этапа движения системы.

Из (1.9) найдем

$$\begin{aligned}
 \Delta_{kd} &= -4 \left[(q_{k-1,d} - B_{kd})^2 + \frac{2}{C_{kd}} \sum_{n=1}^{n=k-1} (q_{nd} - q_{n-1,d}) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(C_{nd} \frac{q_{nd} - q_{n-1,d}}{2} - Q_{nd} \right) \right] \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, m \\
 d &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Пусть в какой-то точке на k -ом этапе скорость $\dot{x}_k = v$, тогда перемещение системы в этой точке будет равно

$$\begin{aligned}
 x_k &= B_{k,d} \pm \sqrt{(q_{k-1,d} - B_{k,d})^2 + \frac{2}{C_{kd}} \sum_{n=1}^{n=k-1} (q_{nd} - q_{n-1,d}) \times} \\
 &\quad \times \left(C_{nd} \frac{q_{nd} - q_{n-1,d}}{2} - Q_{nd} \right) - \frac{v^2}{2\omega_{kd}^2} \\
 k &= 1, 2, 3, \dots, m \\
 d &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

причем x_k — действительная величина, а $\frac{v^2}{2\omega_{kd}^2} > 0$. Поэтому $-\frac{\Delta_{kd}}{4} > 0$ и следовательно $\Delta_{kd} < 0$.

Тогда, выполнив интегрирование в (1.16) в пределах от $q_{k-1, d}$ до q_{kd} , найдем время движения системы на k -ом этапе:

$$t_{kd} - t_{k-1, d} = \frac{1}{\omega_{kd}} \arccos \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{C_{k-1, d}}{C_{kd}} \psi_{k-1, d}(q_{k-1, d}) \cdot \psi_{kd}(q_{kd}) - \frac{Q_{kd}}{C_{kd}} (B_{kd} - q_{k-1, d})}}{\psi_{kd}(q_{kd}) + \frac{Q_{kd}^2}{C_{kd}^2}} \quad (1.17)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots m$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

Из (1.16) легко определяется закон движения системы на k -ом этапе

$$x_k = B_{kd} + \sqrt{\psi_{kd}(q_{kd}) + \frac{Q_{kd}^2}{C_{kd}^2}} \cdot \sin[\omega_{kd}(t - t_{k-1, d}) - \alpha_{kd}] \quad (1.18)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{kd} = \frac{B_{kd} - q_{k-1, d}}{\sqrt{\frac{C_{k-1, d}}{C_{kd}} \psi_{k-1, d}(q_{k-1, d})}}; \quad t_{k-1, d} \leq t \leq t_{kd}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots m$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

Время движения системы на d -ом размахе определяется из равенства

$$T_d = \sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{\omega_{nd}} \arccos \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{C_{n-1, d}}{C_{nd}} \psi_{n-1, d}(q_{n-1, d}) \psi_{nd}(q_{dn}) - \frac{Q_{nd}}{C_{nd}} (B_{nd} - q_{n-1, d})}}{\psi_{nd}(q_{dn}) + \frac{Q_{nd}^2}{C_{nd}^2}} \quad (1.19)$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

Декремент колебания, оценивающий затухания, определяется равенством

$$\delta_d = \frac{\rho_{d+2}}{\rho_d} \quad (1.20)$$

и может быть вычислен с помощью (1.14).

Далее процесс колебания будет аналогичным рассмотренному выше, только роль начального наибольшего (наименьшего) отклонения $d+1$ -ого размаха будет выполнять величина ρ_d .

В заключение отметим, что формулы (1.14), (1.17), (1.18),

(1.19) полностью определяют поведение системы во времени при любой интенсивности затухания.

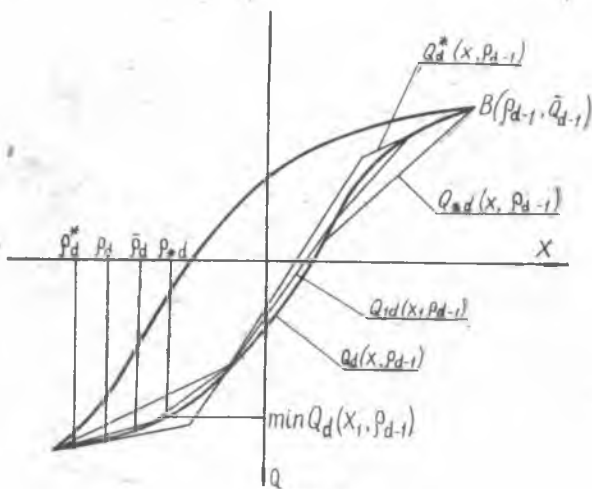
§ 2. Вычисление наибольшего (наименьшего) отклонения и времени движения системы на d -ом размахе с заданной точностью.

Выясним, как выбрать $\eta(\varepsilon_d) > 0$ такое, чтобы из неравенства

$$\max |Q_d(x, \rho_{d-1}) - Q_{1d}(x, \rho_{d-1})| \leq \eta(\varepsilon_d) \quad (2.1)$$

следовали неравенства

$$||\rho_d| - |\bar{\rho}_d|| \leq \varepsilon_d; |T_d - \bar{T}_d| < \varepsilon_d. \quad (2.2)$$



Фиг. 3.

Здесь ρ_d, T_d — точное значение параметров, $\bar{\rho}_d, \bar{T}_d$ — значение этих же параметров, получающихся при замене кривой $Q_d(x, \rho_{d-1})$ полигоном $Q_{1d}(x, \rho_{d-1})$, составленным из n -хорд к кривой и ε_d — заданное положительное число. Построив вписанный и описанный полигоны $Q_d^*(x, \rho_{d-1}), Q_{*d}(x, \rho_{d-1})$ (см. фиг. 3), найдем величины ρ_d^*, ρ_{*d} и время движения на d -ом размахе T_d^* и T_{*d} такие, что

$$\begin{aligned} (-1)^d \rho_d^* &> (-1)^d \rho_d > (-1)^d \rho_{*d}; \\ (-1)^d T_d^* &> (-1)^d T_d < (-1)^d T_{*d}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда можно показать, что для выполнения первого неравенства (2.2) достаточно выполнения неравенства

$$\begin{aligned} \eta(\varepsilon_d) &\leq \frac{\varepsilon_d |Q_{\min}|}{\rho_{d-1} - \rho_d^*}; |Q_{\min}| = \min |Q_d(x, \rho_{d-1})|; \\ (-1)^d \rho_d^* &\geq (-1)^d x \geq (-1)^d \rho_{*d}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (1.5) видно, что время движения системы на первом и последнем этапе d -ого размаха определяется несобственными интегралами. Этот факт и сложность формулы (1.5) приводят к сложной формуле оценки величины $\eta(\varepsilon_d)$ для T_d :

$$\eta(\varepsilon_d) = \frac{4 \sqrt{\frac{2}{M}} (\varepsilon_d - \varepsilon_{1d} - \varepsilon_{md}) \left(\min \left| \int_{\rho_{d-1}}^x Q(x, \rho_{d-1}) dx \right| \right)^{\frac{3}{2}}}{\sum_{k=2}^{\kappa-m-1} (q_{\kappa d} - q_{k-1, d})(q_{\kappa d} + q_{k-1, d} - 2\rho_{d-1})}, \quad (2.5)$$

$$d = 1, 2, 3, \dots$$

где

$$\varepsilon_{1d} = |t_1^* - t^*| \ll \varepsilon_d \quad \varepsilon_{md} = |t_{m-1}^* - t_{m-1}| \ll \varepsilon_d;$$

$$\min \left| \int_{\rho_{d-1}}^x Q(x, \rho_{d-1}) dx \right| - \text{наименьшее из значений функций}$$

$$\left| \int_{\rho_{d-1}}^x Q_d^*(x, \rho_{d-1}) dx \right| \quad \text{и} \quad \left| \int_{\rho_{d-1}}^x Q_{*d}(x, \rho_{d-1}) dx \right| \quad \text{на участке}$$

$$(-1)^d q_{m-1, d} \geq (-1)^d x \geq (-1)^d q_{1d}.$$

Меньшее из значений $\eta(\varepsilon_d)$, сосчитанных из (2.4) и (2.5) обеспечит выполнение обоих условий (2.2).

От размаха к размаху ошибка в вычислении наибольшего (наименьшего) отклонения системы и времени будет накапливаться. Поэтому, чтобы для d -ого размаха выполнялись условия (2.2), ошибка на первом размахе должна быть равна $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_d}{d}$.

Если разгрузочные процессы $Q_d(x, \rho_{d-1}^*)$ и $Q_d[x, (\rho_{d-1}^* + \varepsilon_d)]$ (см. рис. 4) таковы, что выполняются неравенства

$$\bar{\rho}_d^* \leq \rho_d \leq \bar{\rho}_{*d}; \quad \bar{T}_d \geq T_d \geq \bar{T}_{*d}. \quad (2.6)$$

$$\text{и} \quad \left| |\bar{\rho}_d^*| - |\bar{\rho}_{*d}| \right| \leq \varepsilon_d \quad \left| \bar{T}_d - \bar{T}_{*d} \right| \leq \varepsilon_d,$$

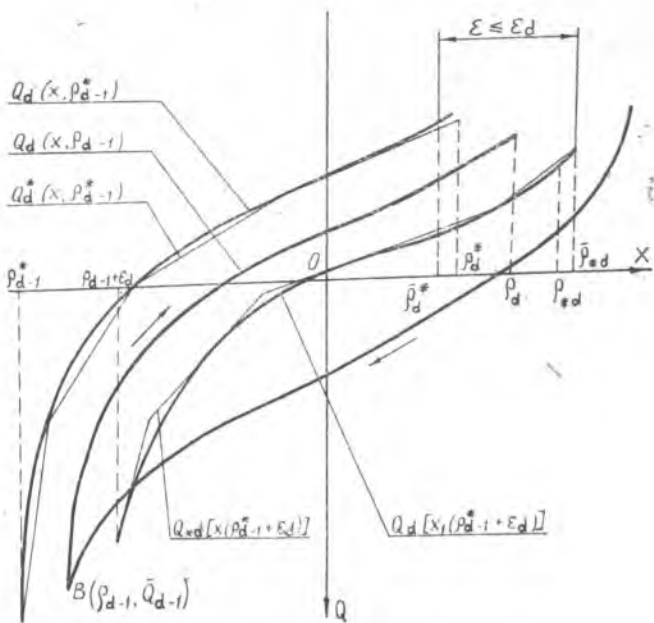
то, вписав полигон $Q_d^*(x, \rho_{d-1}^*)$ в кривую разгрузочного процесса $Q_d(x, \rho_{d-1}^*)$ и описав полигоном $Q_{*d}[x, (\rho_{d-1}^* + \varepsilon_d)]$ кривую разгрузочного процесса $Q_d[x, (\rho_{d-1}^* + \varepsilon_d)]$, так чтобы выполнялось для них неравенство (2.1), а величина $\eta(\varepsilon_d)$ определялась равенствами (2.4), (2.5), получим, что

$$\left| |\rho_d^*| - |\rho_{*d}| \right| < \varepsilon_d; \quad |T_d^* - T_{*d}| < \varepsilon_d \quad (2.7)$$

и следовательно будут справедливы неравенства

$$\left| |\rho_d^*| - |\rho_d| \right| \leq \varepsilon_d; \quad |T_d^* - T_d| < \varepsilon_d, \quad (2.8)$$

В этом случае удастся избежать накопления ошибки от размаха к размаху. И следовательно на первом размахе величину ε_1 можно выбрать равной ε_d .



Фиг. 4.

Этот же результат можно получить и для нагрузочных процессов, удовлетворяющих неравенствам (2.6), описав полигоном $Q_{*d}(x, \rho_{d-1}^*)$ кривую нагрузочного процесса $Q_d(x, \rho_{d-1}^*)$ и вписав полигон $Q_d^*[x, (\rho_{d-1}^* + \epsilon_d)]$ в кривую нагрузочного процесса $Q_d[x, (\rho_{d-1}^* + \epsilon_d)]$ вышеуказанным образом.

На рис. 5 показан простой графический способ построения полигона $Q_{1d}(x, \rho_{d-1})$ к кривой $Q_d(x, \rho_{d-1})$, удовлетворяющего равенству (2.1).

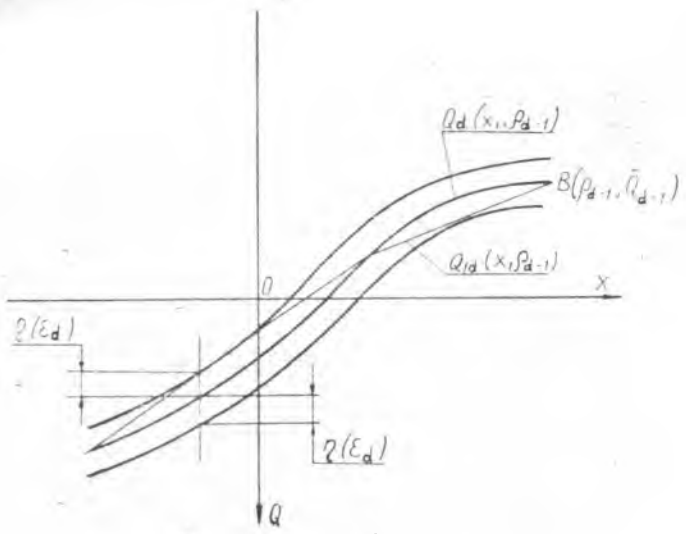
§ 3. Пример. Чтобы проиллюстрировать простоту получения частного результата из общего решения задачи, изложенного в § 1, рассмотрим свободные колебания осциллятора с упруго-гистерезисной петлей в форме четырехугольника (см. фиг. 6). Положив в (1.14) $m=2$, найдем наибольшее (наименьшее) отклонение в конце d -ого размаха в виде:

$$\rho_d = q_{2d} - \frac{Q_{2d}}{C_{2d}} + (-1)^d \times$$

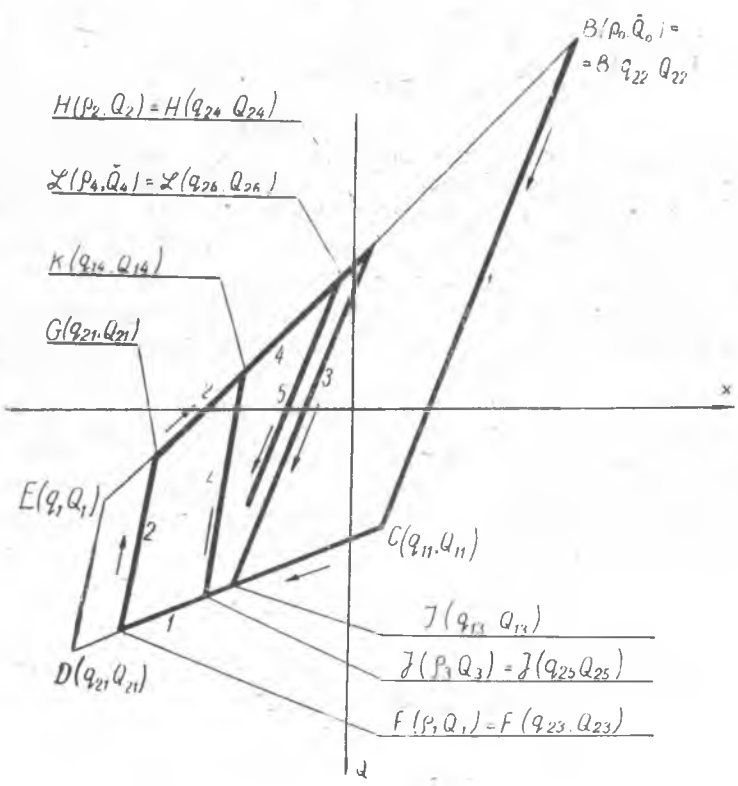
$$\times \sqrt{\left(q_{2d} - q_{1d} - \frac{Q_{2d}}{C_{2d}} \right)^2 + 2(q_{1d} - \rho_{d-1}) \left[\frac{C_{1d}}{C_{2d}} \frac{q_{1d} - \rho_{d-1}}{2} - \frac{Q_{1d}}{C_{2d}} \right]} \quad (3.1)$$

$$d = 1, 2, 3, 4, \dots$$

(1.10) дает условие перехода через положение q_{1d} . Время



Фиг. 5.



Фиг. 6.

движения на каждом этапе определяется из (1.17). На первом этапе d -ого размаха время движения будет равно

$$t_{1d} = \frac{1}{\omega_{1d}} \cdot \arccos \frac{Q_{1d}}{C_{1d} \left(\rho_{d-1} - q_{1d} + \frac{Q_{1d}}{C_{1d}} \right)} \quad d = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.2)$$

и на 2-ом этапе

$$t_{2d} - t_{1d} = \frac{1}{\omega_{2d}} \arccos \frac{\frac{Q_{2d}}{C_{2d}} - q_{2d} + q_{1d}}{\frac{Q_{2d}}{C_{2d}} - q_{2d} + \rho_d} \quad (3.3)$$

$$d = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Из (1.18) найдем закон движения осциллятора на первом этапе d -ого размаха в виде

$$x_1 = q_{1d} - \frac{Q_{1d}}{C_{1d}} + \left(\rho_{d-1} - q_{1d} + \frac{Q_{1d}}{C_{1d}} \right) \cos \omega_{1d} t \quad (3.4)$$

$$d = 1, 2, 3, 4, \dots$$

и на втором этапе в виде

$$x_2 = q_{2d} - \frac{Q_{2d}}{C_{2d}} + \left(\rho_d - q_{2d} + \frac{Q_{2d}}{C_{2d}} \right) \cdot \sin \left[(\omega_{2d} (t - t_{1d}) - \gamma_{2d}) \right] \quad (3.5)$$

$$\sin \alpha_{2d} = \frac{q_{2d} - q_{1d} + \frac{Q_{2d}}{C_{2d}}}{\rho_d - q_{2d} + \frac{Q_{2d}}{C_{2d}}}; \quad d = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Положив в формулах (3.1) ÷ (3.5) $d = \begin{cases} s = 1, 3, 5, 7, \dots \\ s + 1 = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases}$

$$C_{1s} = C_{1s+1}; \quad C_{2s} = C_{2s+1}; \quad q_{2s} = q_{2s+1} = -\rho_{s-1}; \quad q_{1s} = \rho_{s-1} - 2\Delta;$$

$$q_{1s+1} = \rho_s + 2\Delta,$$

где Δ см. [5]

и выразив обобщенные силы $Q_{1d}, Q_{2d}, Q_{s-1, d}$ через перемещения

$$Q_{2s} = -Q_{2s-1} = +Q_{0s} = \Delta (C_{2s} - C_{1s}) - \rho_{s-1} C_{2s};$$

$$Q_{1s} = C_{2s} \rho_{s-1} - \Delta (C_{1s} + C_{2s});$$

$$Q_{1s+1} = \rho_s C_{2s} + \Delta (C_{1s} + C_{2s}), \text{ где } C_{1s} \text{ и } C_{2s} < 0$$

получим решение для осциллятора с упруго-гистерезисной петлей в форме параллелограмма, результаты которого полностью совпадают с [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Пановко. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. Госиздат, ФМЛ, 1960.
2. В. П. Филекин. Свободные колебания составного стержня с массой на конце. Труды Всесоюзной межвузовской конференции «Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей». Вып. XIX, 1965.
3. И. М. Волк. Демпфирование колебаний при помощи двухстороннего упруго-гистерезисного упора. Известия Академии Наук СССР, Отделение технических наук, механика и машиностроение № 3, Москва, 1962.
4. Г. И. Страхов. Свободные колебания системы с полигональной гистерезисной характеристикой. Сборник «Вопросы динамики и прочности». Вып. IX. Издательство Академии Наук Латв. ССР, Рига, 1962.
5. И. М. Волк, Г. А. Новиков. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с упруго-гистерезисной характеристикой в форме параллелограмма. Изв. АН СССР. Механика твердого тела, № 1, Москва, 1967.
6. Н. Г. Калинин и др. Конструктивное демпфирование в неподвижных соединениях. Издательство АН Лат. ССР, Рига, 1960.
7. А. М. Сойфер, В. Н. Бузицкий. Целнометаллические упруго-демпфирующие элементы, их изготовление и применение. «Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей». Труды, выпуск XIX, 1965.
8. А. М. Сойфер, И. Д. Эскин. Поперечный изгиб многослойной консоли. «Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей». Труды, вып. XIX, 1965.