

тирующих элементов, и лежащей в декартовой системе координат  $F_i - \tau_i$  (сила трения — взаимное проскальзывание) между двумя асимптотами  $+F_i^*(\tau_i)$  и  $-F_i^*(\tau_i)$ ;  $\tau_i = y_v \cdot |\sin \varphi_i|$ ;  $k$  — константа, косвенно характеризующая протяженность зоны предварительного смещения, измеренная в 1/мм.

Математическая модель сухого трения в виде выражения (7) примечательна тем, что в ней реализуется принцип Мазинга [6], являющийся неотъемлемым свойством систем конструкционного демпфирования [7]. Результаты расчета нагрузочных кривых кольцевого демпфера с использованием разработанной модели сухого трения показаны на рис. 2, б пунктиром.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алабужев П. М. и др. Теория подобия и размерностей. Моделирование. М., «Высшая школа», 1968.
2. Максак В. И., Митрофанов Б. П. Упругое предварительное смещение дискретного контакта при сложном нагружении. — В кн.: Контактные задачи и их инженерные приложения. М., изд-во ИИИМаш, 1969.
3. Коняхин И. Р. Теория предварительных смещений применительно к вопросам контактирования деталей. Томск, изд-во Томского университета, 1965.
4. Боуден Ф. И., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. М., «Машиностроение», 1968.
5. Бусаров Ю. П. Исследование и учет гистерезисных свойств амортизаторов при расчете систем виброизоляции. Автореф. канд. дис. М., 1965.
6. Masing G. — Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens — Konzern. Bd. 5, 135, 1926.
7. Страхов Г. И. Инженерные задачи статики, динамики и устойчивости систем с большим гистерезисом. Автореф. докт. дис., Рига, АН Латв. ССР, 1969.

УДК 534.62—413/—415

И. Д. СТЕПАНЕНКО, В. И. ВЯКИН

## УСТАЛОСТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Высокочастотные усталостные испытания материалов в условиях плоского напряженного состояния при поперечном изгибе обычно проводят на образцах, выполненных в виде круглых [1] или кольцевых [2] пластин.

Использование указанных методов для изучения прочности композиционных материалов затруднено, так как не обеспечивается требуемый диапазон изменения соотношения главных нормальных напряжений вследствие существенной анизотропии свойств материалов.

Ниже рассматривается метод усталостных испытаний, который позволяет проводить испытания композиционных материалов в широком диапазоне частот и соотношений нормальных напряжений.

Метод основан на испытании образцов в виде прямоугольных пластинок постоянной толщины, шарнирно опертых по периметру, в которых возбуждают резонансные колебания низших изгибных форм с помощью воздушных вибростендов, например, типа КуАИ-ВВ-3 [3].

С целью установления диапазона изменения соотношения нормальных напряжений по обсуждаемому способу испытаний рассмотрено напряженно-деформированное состояние образцов (рис. 1).

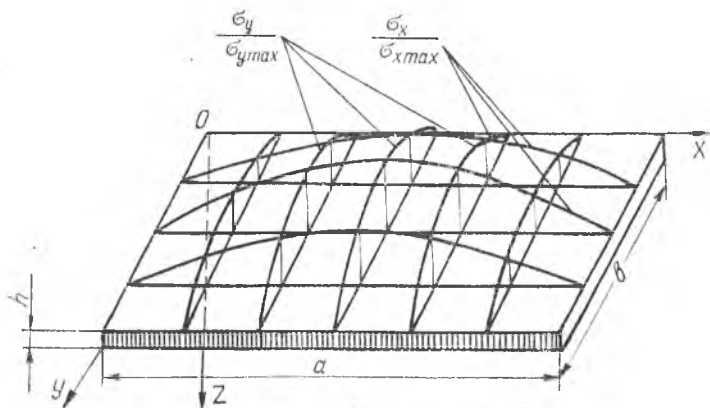


Рис. 1. Система координат и эпюры распределения относительных нормальных напряжений в пластине

Уравнения, описывающие колебания ортотропных прямоугольных пластинок с учетом межслойного сдвига, имеют вид [4]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{12\gamma}{h^3 g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \left[ B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{12} - 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] w - \frac{h^2}{10} \left[ a_{55} (B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. & \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Big] + \varphi = 0; \\
 & \left[ B_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - (B_{12} - 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \right] w - \frac{h^2}{10} \left[ a_{44} (B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \\
 & \left. + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi + a_{55} (B_{12} - B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \Big] - \psi = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $W$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  — искомые функции;  $\gamma$  — удельный вес материала пластинки;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{66}$ ,  $a_{55}$ ,  $a_{44}$  — коэффициенты, зависящие от упругих постоянных;  $h$  — толщина пластинки.

Из принятых граничных условий свободного опирания пластины по контуру представим, согласно [4], решение системы (1) в виде

$$\left. \begin{aligned}
 w(x, y, t) &= w_0 \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \cos \omega_{m n} t; \\
 \varphi(x, y, t) &= c_\varphi \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \cos \omega_{m n} t; \\
 \psi(x, y, t) &= c_\psi \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \cos \omega_{m n} t;
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $W_0$ ,  $c_\varphi$ ,  $c_\psi$  — постоянные;  $m$  и  $n$  — число полуволн деформаций;  $a$  и  $b$  — длина и ширина пластинки.

Из (2) и соотношений связи между внутренними усилиями и перемещениями для ортотропных тел [4] получим следующие формулы для определения нормальных и касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E_1 z w_0}{(1-\nu_1 \nu_2)} \left[ \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\nu_2 n^2 \pi^2}{b^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left( \frac{c_\varphi m \pi}{w_0 G_{13} a} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{c_\psi \nu_2 n \pi}{w_0 G_{23} b} \right) \right] \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}; \\
 \sigma_y &= \frac{E_2 z w_0}{(1-\nu_1 \nu_2)} \left[ \left( \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{\nu_1 m^2 \pi^2}{a^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left( \frac{c_\psi n \pi}{w_0 G_{23} b} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{c_\varphi \nu_1 m \pi}{w_0 G_{13} a} \right) \right] \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}; \\
 \sigma_{xy} &= z \tau w_0 \left[ -2 G_{12} \frac{m n \pi^2}{a b} + \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) G_{12} \left( \frac{c_\varphi n \pi}{w_0 G_{13} b} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{c_\psi m \pi}{w_0 G_{23} a} \right) \right] \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}; \\
 \tau_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) c_\varphi \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}; \\
 \tau_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) c_\psi \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Коэффициенты  $c_\varphi$  и  $c_\psi$  определяются из рассмотрения системы уравнений, получающейся после подстановки (2) в (1):

$$c_\varphi = \omega_0 \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[ E_1 \nu_2 + G_{12} (1 - \nu_1 \nu_2) \right] - \frac{5}{6} \pi^2 G_{23} \left\{ \frac{m^2}{a^2} E_1 + \dots \right. \\ \left. \frac{h^2 m \pi}{12a} \left[ E_1 \nu_2 + G_{12} (1 - \nu_1 \nu_2) \right] - \frac{5a}{6 m \pi} G_{23} \times \right. \\ \left. + \left[ E_1 \nu_2 + 2G_{12} (1 - \nu_1 \nu_2) \right] \frac{n^2}{b^2} \right\} ; \\ \dots \times \left\{ \frac{\pi^2 h^2}{10 G_{13}} \left[ E_1 \frac{m^2}{a^2} + G_{12} (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{n^2}{b^2} \right] + 1 \right\} ; \\ c_\psi = \omega_0 \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[ E_1 \nu_2 + G_{12} (1 - \nu_1 \nu_2) \right] - \frac{5}{6} \pi^2 G_{13} \left\{ \frac{n^2}{b^2} E_2 + \dots \right. \\ \left. \frac{h^2 n \pi}{12b} \left[ E_1 \nu_2 + G_{12} (1 - \nu_1 \nu_2) \right] - \frac{5b}{6 n \pi} G_{13} \times \right. \\ \left. + \left[ E_1 \nu_2 + 2G_{12} (1 - \nu_1 \nu_2) \right] \frac{m^2}{a^2} \right\} ; \\ \dots \times \left\{ \frac{\pi^2 h^2}{10 G_{23}} \left[ E_2 \frac{n^2}{b^2} + G_{12} (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{m^2}{a^2} \right] + 1 \right\} ; \quad (4)$$

где  $E_1 = E_x$ ,  $E_2 = E_y$  — модули Юнга по главным направлениям упругости  $x$ ,  $y$ ;  $G_{23} = G_{yz}$ ,  $G_{13} = G_{xz}$ ,  $G_{12} = G_{xy}$  — модули сдвига;  $\nu_2 = \nu_{12} = \nu_{xy}$ ;  $\nu_1 = \nu_{21} = \nu_{yz}$  — коэффициенты Пуассона.

Для удобства определения напряжений в формулах (4) коэффициенты  $c_\varphi$  и  $c_\psi$  выражены через максимальные прогибы  $W_0$  пластины в местах пучностей при колебаниях по принятой форме  $(m, n)$ . Используя выражения (3) и (4), можно определить величины напряжений при известных (замеренных) значениях прогиба  $W_0$  пластины.

При измерении относительных деформаций точность их определения и, следовательно, точность результатов усталостных испытаний во многом зависит от характера эпюры распределения деформаций (напряжений), особенно в местах максимального значения. Расчетные соотношения для определения относительных напряжений следуют из формул (3):

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{x \max}} = \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} ; \\ \frac{\sigma_y}{\sigma_{y \max}} = \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} ; \\ \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy \max}} = \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} ; \\ \frac{\tau_{xz}}{\tau_{xz \max}} = \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} ; \\ \frac{\tau_{yz}}{\tau_{yz \max}} = \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} . \quad (5)$$

На рис. 1, в качестве примера, показаны эпюры распределения относительных нормальных напряжений  $\sigma_x/\sigma_{x\max}$  и  $\sigma_y/\sigma_{y\max}$  при колебаниях пластины по основной форме ( $m=n=1$ ). Как следует из рис. 1, напряжения меняются плавно, что обеспечивает возможность косвенного измерения их с необходимой для практических целей точностью. Из (5) видно, что в местах максимальных нормальных напряжений касательные напряжения  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{zy}$  равны нулю. Это означает, что усталостные характеристики материала пластин определяются в условиях приближающихся к чистому изгибу. Это важно по той причине, что композиционные материалы обладают малой прочностью на межслойный сдвиг и наличие касательных напряжений в местах действия максимальных нормальных напряжений может внести неопределенность в результаты испытаний. Касательные напряжения достигают максимальных значений либо в углах на поверхности пластины ( $\tau_{xy}$ ), либо на нейтральной линии по серединам длинной ( $\tau_{yz}$ ) и короткой ( $\tau_{xz}$ ) сторон пластины. При закреплении образца свободные кромки выступают за пределы опорного контура и, кроме того, пластина по контуру сжата. По указанным причинам и вследствие малой величины касательных напряжений они не оказывают влияния на характер разрушения образцов, что подтверждено экспериментально.

Хотя нормальные и касательные напряжения в плоскости листа материала зависят от функций  $\psi(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$ , характеризующих роль межслойных сдвигов, относительные величины этих напряжений, как следует из первых трех формул (5), не зависят от указанных функций. Это обеспечивает простоту экспериментального определения и расчетного построения эпюр напряжений.

При справедливости формулы  $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$  с учетом выражения (5) соотношение между нормальными напряжениями, действующими на поверхности пластины, можно представить в виде

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\nu_1 \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{\nu_2 n^2}{b^2} \right) - \frac{h^2}{12} \left( \frac{c_\psi m}{w_0 a G_{13} \pi} + \frac{c_\varphi \nu_2 n}{w_0 G_{23} b \pi} \right) \right]}{\nu_2 \left[ \left( \frac{n^2}{b^2} + \frac{\nu_1 m^2}{a^2} \right) - \frac{h^2}{12} \left( \frac{c_\psi n}{w_0 b G_{23} \pi} + \frac{c_\varphi \nu_1 m}{w_0 G_{13} a \pi} \right) \right]} \quad (6)$$

В рамках классической теории ( $G_{13} = G_{23} = \infty$ ), справедливой для тонких анизотропных пластин, соотношение между нормальными напряжениями описывается формулой, вытекающей из (6):

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = K \frac{\left( \frac{m^2}{\nu_1} + \frac{n^2 c^2}{K} \right)}{\left( \frac{n^2 c^2}{\nu_1} + m^2 \right)}, \quad (7)$$

где  $K = E_1/E_2$ ;  $c = a/b$ ,

Видно, что соотношение нормальных напряжений (7), в частности, в месте их максимального значения, зависит от формы колебаний ( $m, n$ ), соотношения геометрических размеров пластины  $\left(\frac{a}{b}\right)$ , упругих свойств материала ( $\nu$ ) и степени анизотропии упругих свойств, характеризуемой в данном случае отношением модулей упругости ( $E_1/E_2$ ).

Предельные значения  $\sigma_x/\sigma_y$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } c \rightarrow 0 \\ \text{при } c \rightarrow \infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{K}{\nu_1} \\ \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \nu_1 \end{array} \quad (8)$$

Возможности по управлению соотношением нормальных напряжений иллюстрируются на примере стеклопластика ЭДЦ-В с однонаправленной укладкой арматуры в направлении оси X (рис. 2).

Упругие постоянные материала определены по методике [5], принятой к стандартизации:  $E_1 = 4,12 \cdot 10^5$  дан/см<sup>2</sup>,  $E_2 = 2,03 \cdot 10^5$  дан/см<sup>2</sup>,  $\nu_1 = 0,215$ .

Выбор форм колебаний, которые возбуждают в образце, зависит от целей эксперимента — изучения влияния частоты нагружения, типа армирования материала и т. п. Наиболее предпочтительными являются первые три формы изгибных колебаний, эффективно возбуждаемые на воздушных вибростендах. Расчет собственных частот колебаний образцов производится по формулам работы [4].

Испытания проводятся в режиме постоянных относительных деформаций с использованием

для их замера обычной потенциометрической схемы. Вследствие разогрева большинства композиционных материалов на высоких уровнях нагружения при высокочастотных колебаниях применяется дополнительный обдув образцов сжатым воздухом. В этих условиях испытаний, когда приняты меры по отводу тепла,

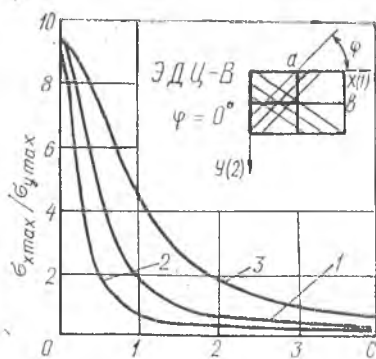


Рис. 2. Соотношение максимальных нормальных напряжений в зависимости от отношения сторон  $a/b$  и формы колебаний:  
 1 —  $n = 1; m = 1$  ( $n = 2; m = 2$ );  
 2 —  $n = 1; m = 2; m = 1$   
 3 —  $n = 2; m = 1$

снижение резонансной частоты при наработке образцом  $10^7$  и более циклов до разрушения обычно не превышает 5%. Поэтому пересчет деформаций  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$ , замеренных в эксперименте, в напряжения производится по закону Гука:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1 \epsilon_x + \nu_1 E_2 \epsilon_y}{1 - \nu_1 \nu_2} ; \\ \sigma_y &= \frac{E_2 \epsilon_y + \nu_2 E_1 \epsilon_x}{1 - \nu_1 \nu_2} . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

На основании (9) соотношение нормальных деформаций имеет вид

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} = \frac{\frac{\sigma_x}{\sigma_y} - \nu_1}{K - \nu_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}} \quad (10)$$

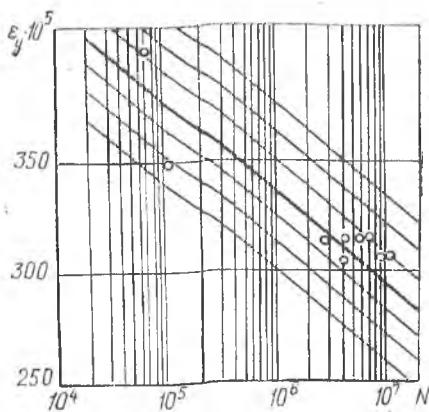


Рис. 3. Кривая усталости стеклопластика ЭДЦ-В с однонаправленной структурой армирования при соотношении главных нормальных напряжений  $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1$

На рис. 3 представлены результаты усталостных испытаний образцов  $68 \times 45$  (2—2,3) мм из материала ЭДЦ-В при соотношении напряжений  $\sigma_x/\sigma_y = 1$ .

Опыты проводились по основной форме колебаний ( $m = n = 1$ ) с частотой 2830—3050 Гц. Указанные соотношения напряжений обеспечиваются, как видно из рис. 2, при соотношении размеров сторон пластины  $c = 1,51$

Диаграмма усталости на рис. 3 построена в координатах  $\epsilon_y - \lg N$ , так как в процессе испытаний проводился замер деформации  $\epsilon_y$  в месте их максимальных значений (в центре образ-

цов). Ограниченный предел выносливости в напряжениях на базе  $10^7$  циклов равен  $7,65 \text{ кг/мм}^2$ .

Для принятых образцов при  $c = 1,51$  и  $\sigma_x/\sigma_y = 1$  расчетное соотношение нормальных деформаций  $\epsilon_x/\epsilon_y = 0,434$ . Тензометрирование образцов на различных уровнях нагружения показало, что отличие экспериментальных значений  $\epsilon_x/\epsilon_y$  от расчетного не превышало 3,5%, что свидетельствует о реализации расчет-

ной схемы (тонкая, свободно опертая пластина) и о возможности практического использования данного метода испытаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г. С., Трапезон А. Г. Определение усталостной прочности материалов в условиях плоского напряженного состояния. — «Проблемы прочности», 1975, № 4.
2. Корнилов А. А. Способ исследования усталости листовых материалов. А. с. № 308333 от 17.IX.1971.
3. Степаненко Н. Д., Ковешников Б. П. Методика определения усталостных свойств стеклопластиковых лопаток компрессоров и стеклопластиков при высокочастотных колебаниях. — В сб.: «Усталостная прочность и долговечность авиационных конструкций». Труды КуАИ, Куйбышев, 1974, вып. 1.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
5. Ковешников Б. П., Степаненко Н. Д. Влияние типа армирования и частоты нагружения на упругие свойства стеклопластиков. — В сб.: «Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов». Куйбышев, 1975, вып. 1 (68).

УДК 623.428.1

Т. Г. ТАТИШВИЛИ, М. В. ХВИНГИЯ

## КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК С УЧЕТОМ РЕАЛЬНОЙ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА

Известно, что упругая характеристика многослойной балки, нагруженной сосредоточенной нагрузкой, описывается петлей гистерезиса [1], [2].

Рассмотрим колебания слоистой невесомой балки (полосы), в середине которой закреплена масса; защемленные концы балки нагружены упругими моментами сил трения. Уравнение вынужденных колебаний такой системы имеет вид

$$m\ddot{x} + P(x) = F(x, t), \quad (1)$$

где  $m$  — масса,  $P(x)$  — характеристика упруго-фрикционной силы,  $F(x, t)$  — нелинейная возмущающая сила.

Статическая характеристика упруго-фрикционных сил может быть симметричной или несимметричной, состоять из прямолинейных или криволинейных участков, а также иметь и другие особен-