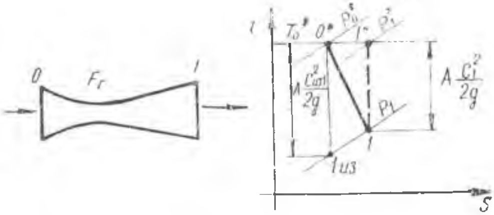
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, выпуск XXII, 1965 г.
ВОПРОСЫ МИКРОЭНЕРГЕТИКИ

В. Т. ШЕСТАКОВ

О СВЯЗИ КОЭФФИЦИЕНТОВ φ, σ и μ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ В КАНАЛАХ[1]

При рассмотрении движения сжимаемого вязкого газа в реактивных соплах в неподвижных и вращающихся каналах турбинных и компрессорных решеток в рамках одномерной задачи вводятся понятия коэффициента скорости $\varphi = \frac{C}{C_{\text{из}}}$, коэффициента восстановления давления торможения $\sigma = \frac{P^*}{P^*_{\text{из}}}$, коэффициента расхода $\mu = \frac{G}{G_{\text{из}}}$, при помощи которых производится сравнение скорости C, давления торможения P^* и расхода G сжимаемого вязкого газа в данном сечении канала с соответствующими параметрами в том же сечении при изоэнтропном движении.

Сравнение параметров газа в некотором сечении 1—1 канала (фиг. 1) при действительном (политропном) и изоэнтропном движении обычно производится при одинаковом давлении торможения P_0^* и температуре торможения T_0^* на входе (сечение 0—0) и статическом давлении P_1 в рассматриваемом сечении *1—1*. Каналы при этом теплоизолированы.



Фиг. 1.

[1] Отдельные формулы связей коэффициентов φ, σ, μ приводятся в ряде работ [1, 2], в данной же статье вопрос о связи φ, σ, μ рассматривается шире (для случая неподвижных и подвижных каналов), а также приводятся графики связей между этими коэффициентами, значительно ускоряющие расчеты.

Между коэффициентами φ, σ, μ существует определенная связь, поэтому в расчетах движения газа в каналах при произвольном выборе этих коэффициентов может быть допущена ошибка. В случае использования достоверных опытных значений коэффициентов φ, σ, μ ошибка исключается, так как опыт устанавливает реальное соотношение между ними. Если используется опытное значение одного из коэффициентов, то два других не могут выбираться произвольно, а должны быть определены по формулам связи между ними.

При выводе соотношений между коэффициентами φ, σ, μ используются газодинамические функции:

$$\lambda = \frac{C}{a_{\text{кр}}};\ \pi = \frac{P}{P^*};\quad \tau = \frac{T}{T^*};\quad \varepsilon = \frac{\rho}{\rho^*};\ q = \frac{F_{\text{кр}}}{F}.$$

Рассмотрим соотношение между коэффициентами φ; σ; μ при постоянной теплоемкости (или при $k = \text{const}$).

Коэффициент скорости φ_1, учитывающий потерю скорости $\Delta C_1 = C_{\text{из. 1}} - C_1$, и коэффициент восстановления давления торможения σ_1, учитывающий соответствующую потерю давления торможения $\Delta P^* = P^*_{\text{из. 1}} - P_1^*$ при движении вязкого газа на участке $0-1$, определяются по формулам $\varphi_1 = \dfrac{C_1}{C_{\text{из. 1}}}$ и $\sigma_1 = \dfrac{P_1^*}{P^*_{\text{из. 1}}}$.

Действительная скорость течения вязкого газа в сечении $1-1$ определяется по формуле

$$C_1 = \sqrt{2g\frac{k}{k-1}RT_1^*\left[1-\left(\frac{P_1}{P_1^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}, \tag{1}$$

где P_1^* и T_1^* — параметры торможения в сечении $1-1$.

Изоэнтропная скорость в том же сечении

$$C_{\text{из. 1}} = \sqrt{2g\frac{k}{k-1}RT^*_{\text{из. 1}}\left[1-\left(\frac{P_{\text{из. 1}}}{P^*_{\text{из. 1}}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}. \tag{2}$$

Имея в виду, что $P^*_{\text{из. 1}} = P_0^*$; $T^*_{\text{из. 1}} = T_1^* = T_0^*$; $P_{\text{из. 1}} = P_1$, получим:

$$\varphi_1^2 = \frac{1-\left(\dfrac{P_1}{P_1^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{1-\left(\dfrac{P_1}{P^*_{\text{из. 1}}}\right)^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1-\left(\dfrac{\pi_{\text{из. 1}}}{\sigma_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{1-(\pi_{\text{из. 1}})^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1-\dfrac{\tau_{\text{из. 1}}}{\sigma_1^{\frac{k-1}{k}}}}{1-\tau_{\text{из. 1}}}. \tag{3}$$

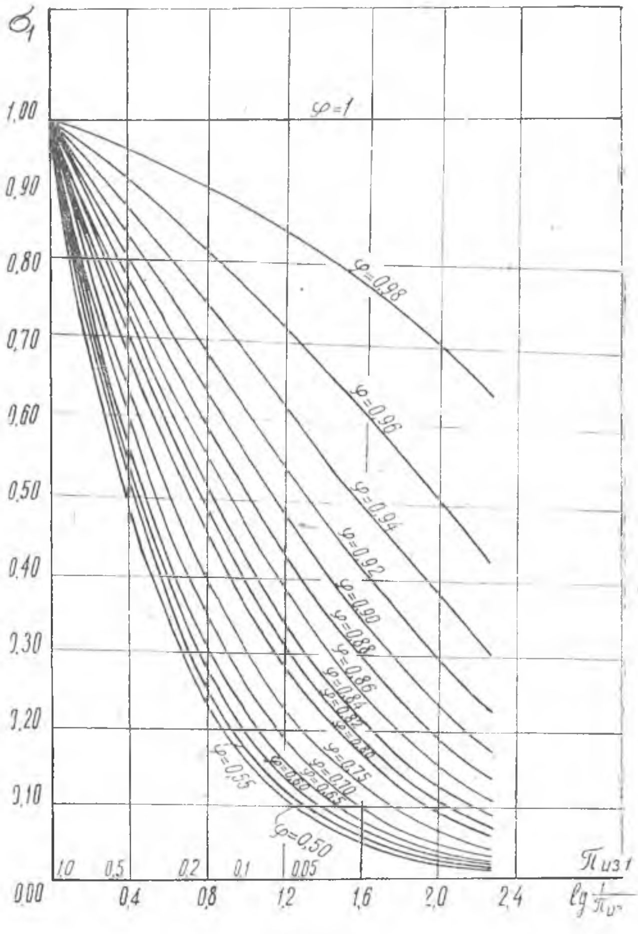
Обратная зависимость

$$\sigma_2 = \frac{\pi_{\text{из. 1}}}{\left\{1-\varphi_1^2\left[1-(\pi_{\text{из. 1}})^{\frac{k-1}{k}}\right]\right\}^{\frac{k}{k-1}}}. \tag{4}$$

В некоторых случаях в качестве независимой переменной принимается функция $\pi_1 = \frac{P_1}{P_1^*}$, тогда зависимость $\sigma_1 = f(\varphi_1; \pi_1)$ будет выражаться формулой

$$\sigma_1 = \frac{1}{\pi_1}\left(1 - \frac{1-\pi_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{\varphi_1^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \qquad (5)$$

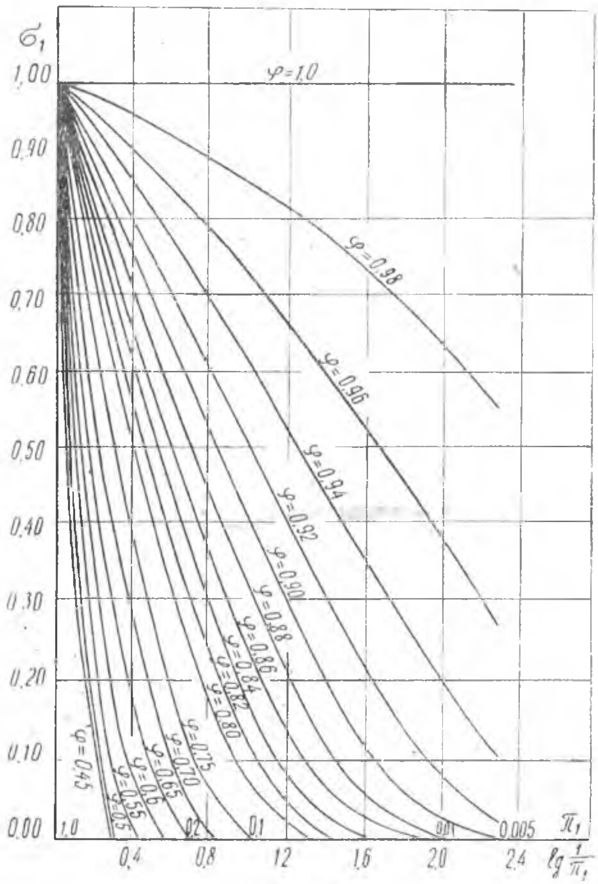
Интересно отметить, что в соответствии с этой формулой для каждой $\pi_1 > 0$ существует определенное значение $(\varphi_1)_{min}$, при котором $\sigma_1 \to 0$. Очевидно $(\varphi_1)_{min} = \sqrt{1-\pi_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$, причем, при уменьшении π_1 (при увеличении степени расширения) $(\varphi_1)_{min}$ возрастает и при $\pi_1 \to 0$ $(\varphi_1)_{min} = 1$.



Фиг. 2.

Таким образом, в каналах с движением вязкого газа пр[и] действительных значениях числа $\lambda_1 > 0$ на выходе из канала (и[ли] при $\pi_1 > 0$) коэффициент скорости φ_1 больше $(\varphi_1)_{min}$, соответству[ю]щего условию $\sigma_1 > 0$. В действительности, $\sigma_1 = \frac{P_1^*}{P_0^*} > 0$, так что $\varphi_1 > (\varphi_1)_{min}$. При этом, чем больше λ_1, тем больше и $(\varphi_1)_{min}$. Урав[]нение (4) с независимым параметром $\pi_{из. 1}$ нельзя использоват[ь] для определения $(\varphi_1)_{min}$, так как при $\pi_1 > 0$ условие $\sigma_1 \to 0$ со[от]ветствует условию $\pi_{из. 1} = 0$ (или $\lambda_{из. 1} = \lambda_{max}$, $M_{из. 1} = \infty$) и, в соот[]ветствии с уравнением (4) условие $\sigma_1 \to 0$ выполняется при любо[м] $1 > \varphi_1 > 0$.

На фиг. 2 приведены графики зависимости $\varphi_1 = \varphi(\sigma_1; \pi_{из. 1})$ для процесса расширения газа. Следует отметить, что пр[и] $\varphi = \text{const}$, в зависимости от величины $\pi_{из. 1} = \frac{P_1}{P^*_{из. 1}}$, коэффициен[т]



Фиг. 3.

может принимать резко различающиеся значения: при большой $\pi_{из.1}$ коэффициент σ_1 имеет значения, сравнимые с φ_1, а при малой $\pi_{из.1}$ коэффициент σ_1 мал. Иными словами, одна и та же потеря скорости ΔC_1 (или соответствующее уменьшение φ_1) при малых $\pi_{из.1}$ (при большой величине самой скорости C_1) соответствует большим потерям давления торможения ΔP_1^* (малым σ_1), а при больших $\pi_{из.1}$ — малым потерям давления торможения.

На фиг. 3 приведены графики зависимости $\sigma_1 = f(\varphi_1; \pi_1)$.

Кроме формул (3) и (4), более простую связь между φ_1 и σ_1 можно установить посредством газодинамических функций действительного и изоэнтропного течений.

Так, коэффициент
$$\varphi_1 = \frac{C_1}{C_{из.1}} = \frac{\lambda_1 \cdot a_{кр.1}}{\lambda_{из.1} \cdot a_{кр.из.1}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{из.1}}. \tag{6}$$

Здесь $a_{кр.1} = a_{кр.из.1}$, ибо $T^*_{из.1} = T_1^*$.

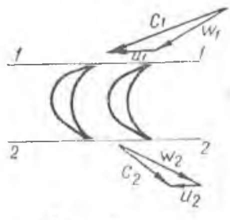
С другой стороны,
$$\sigma_1 = \frac{P_1^*}{P^*_{из.1}} = \frac{P_1^*}{P_0^*} = \frac{\pi_{из.1}}{\pi_1}. \tag{7}$$

При заданных P_0^*; T_0^*; P_1; k; φ_1 определение σ_1 производится в следующем порядке. Вычисляем $\pi_{из.1} = \frac{P_1}{P_0^*}$ и по таблицам газодинамических функций (для заданного k) находим функцию $\lambda_{из.1}$. Затем по формуле $\lambda_1 = \varphi_1 \cdot \lambda_{из.1}$ вычисляется действительная функция λ_1, а по таблицам находится функция — $\pi_1 = \frac{P_1}{P_1^*}$. Наконец, по формуле (7) вычисляется коэффициент σ_1. При обратной задаче, когда задан коэффициент σ_1 и определяется соответствующее значение коэффициента φ_1, сначала вычисляется $\pi_{из.1}$ и по таблицам находится $\lambda_{из.1}$, затем по формуле (4) находится действительная функция $\pi_1 = \frac{\pi_{из.1}}{\sigma_1}$, а по таблицам — функция λ_1; наконец, по формуле (6) вычисляется коэффициент $\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{из.1}}$.

В случае вращающихся каналов рабочих решеток уравнения (3), (4), (6), (7) должны быть записаны в относительных координатах.

Для вращающегося канала (фиг. 4), считая параметры сечения $1-1$ исходными, можно записать:

$$\psi_{w2} = \frac{w_2}{w_{из.2}} \quad \text{и} \quad \sigma_{w2} = \frac{P^*_{w2}}{P^*_{из.w2}}.$$



Фиг. 4.

Действительная относительная скорость газа на выходе из канала

$$w_2 = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} RT^*_{w1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P^*_{w2}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \tag{8}$$

Изоэнтропная относительная скорость газа

$$w_{\text{из. }2} = \sqrt{2g\frac{k}{k-1}RT^*_{\text{из. }w2}\left[1-\left(\frac{P_2}{P^*_{\text{из. }w2}}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}.$$

В случае $u_2 \neq u_1$ (например, радиальная турбина или центр[обе]жный компрессор) для теплоизолированного канала:

$$T^*_{\text{из. }w2} = T^*_{w2} = T^*_{w1} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{\frac{k}{k-1}R\cdot 2g}. \quad (1$$

$$P^*_{\text{из. }w2} = P^*_{w1}\left(\frac{T^*_{\text{из. }w2}}{T^*_{w_1}}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = P^*_{w1}\left(\frac{T^*_{w2}}{T^*_{w1}}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (1$$

При $u_2 = u_1$, $T^*_{\text{из. }w2} = T^*_{w2} = T^*_{w1}$; $P^*_{\text{из. }w2} = P^*_{w1}$.

По аналогии с уравнением (3) для данного случая вращающи[х]ся каналов можно написать:

$$\psi_2^2 = \frac{1-\left(\frac{P_2}{P^*_{w2}}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{1-\left(\frac{P_2}{P^*_{\text{из. }w2}}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \frac{1-\left(\frac{\pi_{\text{из. }w2}}{\sigma_{w2}}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{1-(\pi_{\text{из. }w2})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \frac{1-\frac{\tau_{\text{из. }w2}}{(\sigma_{w2})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}}{1-\tau_{\text{из. }w2}}. \quad (1$$

Обратная зависимость

$$\sigma_{w2} = \frac{\pi_{\text{из. }w2}}{\left\{1-\psi_2^2\left[1-(\pi_{\text{из. }w2})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]\right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}. \quad (1$$

По аналогии же с уравнениями (6) и (7) получим:

$$\psi_2 = \frac{w_2}{w_{\text{из. }2}} = \frac{\lambda_{w2}\cdot a_{\text{кр. }w2}}{\lambda_{\text{из. }w2}\cdot a_{\text{кр. из. }w2}} = \frac{\lambda_{w2}}{\lambda_{\text{из. }w2}}. \quad (1$$

Здесь

$$a_{\text{кр. }w2} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}gRT^*_{w2}} = a_{\text{кр. из. }w2} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}gRT^*_{\text{из.}w2}},$$

ибо $T^*_{\text{из. }w2} = T^*_{w2}$,

$$\sigma_{w2} = \frac{P^*_{w2}}{P^*_{\text{из. }w2}} = \frac{\pi_{\text{из. }w2}}{\pi_{w2}}. \quad (15$$

Здесь $P_{w2} = P_2$.

Графики зависимости $\varphi_1 = \varphi(\sigma_1; \pi_{\text{из. }1})$ на фиг. 2 можно ра[с]сматривать как графики зависимости $\psi_2 = \psi(\sigma_{w2}; \pi_{\text{из. }w2})$, если вме[]сто φ_1 подразумевать ψ_2, а вместо $\pi_{\text{из. }1} \to \pi_{\text{из. }w2}$.

Рассмотрим соотношение между коэффициентом φ_1 и коэф[]фициентом расхода $\mu = \frac{G}{G_{\text{из.}}}$.

Величину μ необходимо знать при определении площади F сечения канала. Коэффициент расхода μ не зависит от положения сечения канала, однако устанавливая связь между μ и φ, придется это выражение записывать для определенного сечения, так как величина φ зависит от положения сечения.

Так как опытная величина φ (фиг. 1) соответствует выходному сечению *1—1* канала, то и μ следует определять по параметрам сечения *1—1* на выходе. Причем, надо иметь в виду, что коэффициент φ в этом случае учитывает полную потерю энергии при движении вязкого газа в канале по всей его длине до выходного сечения *1—1*. Например, в случае соплового канала турбины φ_1 соответствует полным потерям, включающим профильные, концевые и волновые (в случае сверхзвуковых течений) потери.

Итак,

$$\mu_1 = \frac{G_1}{G_{\text{из. }1}} = \frac{\gamma_1 \cdot c_1 \cdot F_1}{\gamma_{\text{из. }1} \cdot c_{\text{из. }1} \cdot F_1} = \frac{\dfrac{P_1}{RT_1}}{\dfrac{P_{\text{из. }1}}{RT_{\text{из. }1}}} \varphi_1 = \frac{T_{\text{из.}1}}{T_1} \varphi_1 = \frac{\tau_{\text{из. }1}}{\tau_1} \cdot \varphi_1, \qquad (16)$$

где $P_{\text{из. }1} = P_1$; $T^*_{\text{из. }1} = T_1^*$.

Выражая τ через λ по формулам $\tau_{\text{из. }1} = 1 - \dfrac{k-1}{k+1} \lambda^2_{\text{из. }1}$ и $\tau_1 = 1 - \dfrac{k-1}{k+1} \lambda_1^2$, и учитывая, что $\lambda_1 = \varphi_1 \cdot \lambda_{\text{из. }1}$, получим:

$$\mu_1 = \left[\frac{1 - \dfrac{k-1}{k+1} \lambda^2_{\text{из. }1}}{1 - \dfrac{k-1}{k+1} \varphi_1^2 \lambda^2_{\text{из.}1}} \right] \cdot \varphi_1. \qquad (17)$$

На фиг. 5 изображен график зависимости $\mu_1 = \mu(\varphi_1; \lambda_{\text{из. }1})$. Как видим, при $\varphi_1 = \text{const}$ величина μ_1 в области большой $\lambda_{\text{из. }1}$ существенно ниже, чем в области малой $\lambda_{\text{из. }1}$.

При определении площади сечения подвижных каналов (фиг. 4) необходимо в уравнении (17) величины $\varphi_{\text{из. }1}$ и φ_1 изменить на $\lambda_{\text{из. }w2}$ и φ_2, тогда получим

$$\mu_{w2} = \left[\frac{1 - \dfrac{k-1}{k+1} \lambda^2_{\text{из. }w2}}{1 - \dfrac{k-1}{k+1} \psi^2_{w2} \lambda^2_{\text{из. }w2}} \right] \psi_{w2}, \qquad (18)$$

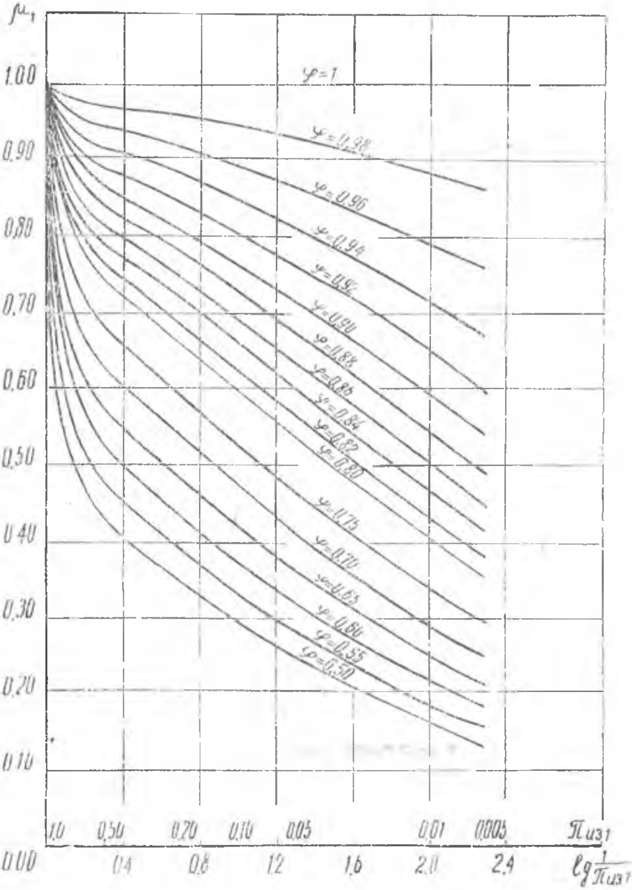
где $\lambda_{\text{из. }2} = \dfrac{w_{\text{из. }2}}{a_{\text{кр. из. }w2}}$ — определяется по $\pi_{\text{из. }w2} = \dfrac{P_{w2}}{P^*_{\text{из. }w2}} = \dfrac{P_2}{P^*_{\text{из. }w2}}$;

$$\psi_{w2} = \frac{w_2}{w_{\text{из. }2}}.$$

Параметры $P^*_{\text{из. }w2}$; $T^*_{\text{из. }w2}$; $w_{\text{из. }2}$ выражаются через исходные параметры сечения *1—1* по формулам (10) и (11).

Кроме зависимостей $\sigma = \sigma(\varphi)$ и $\mu = \mu(\varphi)$, можно получить обобщенную зависимость $\mu = \mu(\sigma; \varphi)$, если в уравнении (16) отношение $\frac{\tau_{\text{из.}1}}{\tau_1}$ заменить выражением

$$\frac{\tau_{\text{из. }1}}{\tau_1} = \left(\frac{\pi_{\text{из. }1}}{\pi_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{P_{\text{из. }1}}{P^*_{\text{из. }1}} \cdot \frac{P_1^*}{P_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \sigma_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} .$$



Фиг. 5.

Тогда получим

$$\mu_1 = \sigma_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \varphi_1. \qquad (1$$

Площадь сечения канала определяется по формуле

$$F_1 = \frac{F_{\text{кр. }1}}{q_1}, \text{ где } F_{\text{кр.}1} = \frac{G\sqrt{T_1^*}}{m \cdot P_1^*} = \frac{G\sqrt{T_0^*}}{m \cdot P_0^* \cdot \sigma_1}, \qquad (2$$

где

$$m = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Таким образом,

$$F_1 = \frac{G\sqrt{T_0^*}}{m \cdot P_0^* \cdot q_1 \cdot \sigma_1}. \qquad (21)$$

В случае сверхзвуковых сопел площадь горловины можно было бы определить по формуле (21), принимающей в этом случае вид

$$F_г = \frac{G\sqrt{T_0^*}}{m \cdot P_0^* \cdot q_г \cdot \sigma_г}.$$

При этом следует иметь в виду, что в случае движения вязкого газа $(F_{кр.})_г < F_г$.

Однако величины $q_г$ и $\sigma_г$ обычно неизвестны, поэтому $F_г$ следует определять по формуле

$$F_г = \frac{G_{из}\sqrt{T_0^*}}{m \cdot P_0^*} = \frac{G\sqrt{T_0^*}}{m \cdot P_0^* \cdot \mu_1}. \qquad (22)$$

В этом выражении $\mu_1 = \mu_г$, так как величина μ не зависит от положения сечения.

Наконец соотношение между F_1 и $F_г$ получим, разделив уравнение (20) на уравнение (21), тогда

$$F_1 = F_г \frac{\mu_1}{q_1 \cdot \sigma_1}. \qquad (23)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Жирицкий, В. И. Локай, М. К. Максутова, В. А. Стрункин.* Газовые турбины авиационных двигателей, Оборонгиз. 1963.
2. *М. Е. Дейч.* «Техническая газодинамика». Госэнергоиздат, 1961.