ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 2, 1975

И.С.Ахмедьянов

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОВЕРХНОСТНОМ НАГРУЖЕНИИ

Решение задачи об изгибе сферической оболочки при произвольном поверхностном нагружении [I] можно свести к интегрированию следующих трех уравнений [2]:

$$\nabla^2 \sigma + (1 + i\lambda)\sigma = \Phi_q + i\Omega_q \tag{I}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \psi} + 2W \operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda}\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1 + i\lambda} R q_x , \tag{2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \psi} + 2Z \operatorname{ctg}\psi - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda}\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1 + i\lambda} R q_y . \tag{3}$$

Здесь

$$\sigma = N + \frac{\mu - i\lambda}{1 + \mu}\frac{M}{R},$$

$$W = X - \frac{\mu - i\lambda}{1 - \mu}\frac{U}{R}, \qquad Z = Y - \frac{\mu - i\lambda}{1 - \mu}\frac{V}{R},$$

$$\Phi_q = -(1 + \mu) R \left(\frac{\partial q_x}{\partial \psi} + q_x \operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial q_y}{\partial \varphi}\right) + R q_z ,$$

$$\Omega_q = \lambda R q_z ,$$

где, в свою очередь,

$$N = N_1 + N_2, \quad X = N_1 - N_2, \quad Y = 2S$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2, \quad U = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2, \quad V = 2H,$$

N_1, N_2, S, M_1, M_2, H – усилия и моменты; q_x, q_y, q_z – компоненты распределенной поверхностной нагрузки

$$\lambda = \sqrt{12(1-\mu^2)R^2/h^2 - \mu^2},$$

R, h – радиус срединной поверхности и толщина оболочки, μ – коэффициент Пуассона; ψ, φ – географические координаты точки срединной поверхности оболочки.

Рассмотрим частный случай, когда компоненты поверхностной нагрузки представлены в виде тригонометрических рядов:

$$q_x = \sum_{n=0}^{\infty} q_{xn} \cos n\varphi, \quad q_y = \sum_{n=1}^{\infty} q_{yn} \sin n\varphi, \quad q_z = \sum_{n=0}^{\infty} q_{zn} \cos n\varphi. \tag{4}$$

Для этого случая будем иметь:

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \cos n\varphi, \quad W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \cos n\varphi, \quad Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \sin n\varphi. \tag{5}$$

Здесь σ_n, W_n, Z_n – функции ψ, удовлетворяющие обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые получаются из (I) – – (3) после подстановки в них выражений (4) и (5). Найдем частное решение этих уравнений, соответствующее поверхностной нагрузке (4). Обозначая это решение через σ_{qn}, W_{qn} и Z_{qn}, будем иметь для его определения следующие уравнения (штрих означает производную по аргументу ψ):

$$\sigma''_{qn} + \sigma'_{qn} \operatorname{ctg}\psi + \left(1 + i\lambda - \frac{n^2}{\sin^2\psi}\right)\sigma_{qn} = \Phi_{qn} + i\,\Omega_{qn} \tag{6}$$

$$W'_{qn} + 2W_{qn} \operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi} Z_{qn} = \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\sigma'_{qn} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1+i\lambda} R q_{xn}, \tag{7}$$

$$Z'_{qn} + 2Z_{qn} \operatorname{ctg}\psi + \frac{n}{\sin\psi} W_{qn} = -\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\frac{n}{\sin\psi}\sigma_{qn} + \frac{2(\mu - i\lambda)}{1+i\lambda} R q_{yn}. \tag{8}$$

Здесь

$$\Phi_{qn} = -(1+\mu)R\left(q'_{xn} + q_{xn}\,\mathrm{ctg}\,\psi + \frac{n}{\sin\psi}\,q_{yn}\right) + R q_{zn},$$

$$\Omega_{qn} = \lambda R q_{zn}.$$

Предположим, что нам известно частное решение σ_{qn} уравнения (6)[ж]. Покажем, что через него весьма просто может быть выражено и решение уравнений (7) и (8).

Полагая

$$\eta_n = W_{qn} + Z_{qn}, \quad \theta_n = W_{qn} - Z_{qn}, \tag{9}$$

получаем из (7) и (8) два независимых уравнения:

$$\eta'_n + \left(2\,\mathrm{ctg}\,\psi + \frac{n}{\sin\psi}\right)\eta_n =$$

$$= \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\left(\sigma'_{qn} - \frac{n}{\sin\psi}\,\sigma_{qn}\right) + \frac{2(\mu-i\lambda)}{1+i\lambda}R\left(q_{xn} + q_{yn}\right), \tag{10}$$

$$\theta'_n + \left(2\,\mathrm{ctg}\,\psi - \frac{n}{\sin\psi}\right)\theta_n =$$

$$= \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\left(\sigma'_{qn} + \frac{n}{\sin\psi}\,\sigma_{qn}\right) + \frac{2(\mu-i\lambda)}{1+i\lambda}R\left(q_{xn} - q_{yn}\right). \tag{11}$$

Частные решения этих уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned}\eta_n = {} & \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\,\frac{\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2}}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}\left(\sigma'_{qn} - \frac{n}{\sin\psi}\,\sigma_{qn}\right)\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}\,\sin^2\psi\,d\psi + \\ & + \frac{2(\mu-i\lambda)}{1+i\lambda}\,\frac{\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2}}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}R\left(q_{xn}+q_{yn}\right)\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}\,\sin^2\psi\,d\psi,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\theta_n = {} & \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}\,\frac{\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}\left(\sigma'_{qn} + \frac{n}{\sin\psi}\,\sigma_{qn}\right)\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2}\,\sin^2\psi\,d\psi + \\ & + \frac{2(\mu-i\lambda)}{1+i\lambda}\,\frac{\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}R\left(q_{xn}-q_{yn}\right)\mathrm{ctg}^n\frac{\psi}{2}\,\sin^2\psi\,d\psi\end{aligned} \tag{13}$$

ψ_0 - начальное значение угла ψ .

Для вычисления первого интеграла формулы (12) положим:

$$y_n = \sigma_{qn}\,\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}$$

Тогда

$$\left(\sigma'_{qn} - \frac{n}{\sin\psi}\,\sigma_{qn}\right)\mathrm{tg}^n\frac{\psi}{2}\,\sin^2\psi = \left(y'_n\sin\psi - 2ny_n\right)\sin\psi.$$

[ж] Оно может быть найдено или методом вариации произвольных постоянных, или каким-либо иным способом.

Далее, имея в виду, что σ_{qn} является решением уравнения (6), получаем:

$$(y_n' \sin\psi - 2ny_n)' + (1+i\lambda)y_n \sin\psi =$$
$$= (\Phi_{qn} + i\Omega_{qn})\, tg^n \frac{\psi}{2} \sin\psi .$$

Это соотношение позволяет представить искомый интеграл через функцию σ_{qn} , ее производную и интегралы от поверхностной нагрузки.

Аналогичным образом находится первый интеграл выражения (I3).

В конечном итоге получаем решение уравнений (7) и (8) в следующем виде:

$$W_{qn} = -\sigma_{qn} - \frac{2}{1+i\lambda}\left(\sigma_{qn}' \, ctg\psi - \frac{n^2}{\sin^2\psi}\sigma_{qn}\right) +$$
$$+ \frac{1}{1+i\lambda}\,\frac{tg^n\frac{\psi}{2}}{\sin^2\psi}\left[\eta_{qn} + \mu\lambda_{qn} + i(\theta_{qn} - \lambda\lambda_{qn})\right] +$$
$$+ \frac{1}{1+i\lambda}\,\frac{ctg^n\frac{\psi}{2}}{\sin^2\psi}\left[\nu_{qn} + \mu\mu_{qn} + i(\xi_{qn} - \lambda\mu_{qn})\right],$$

$$Z_{qn} = \frac{1}{1+i\lambda}\,\frac{2n}{\sin\psi}\left(\sigma_{qn}\, ctg\psi - \sigma_{qn}'\right) -$$
$$- \frac{1}{1+i\lambda}\,\frac{tg^n\frac{\psi}{2}}{\sin^2\psi}\left[\eta_{qn} + \mu\lambda_{qn} + i(\theta_{qn} - \lambda\lambda_{qn})\right] +$$
$$+ \frac{1}{1+i\lambda}\,\frac{ctg^n\frac{\psi}{2}}{\sin^2\psi}\left[\nu_{qn} + \mu\mu_{qn} + i(\xi_{qn} - \lambda\mu_{qn})\right].$$

Здесь

$$\eta_{qn} = \alpha_{qn}^{**} - (n - \cos\psi)\,\alpha_{qn}^{*}$$
$$\theta_{qn} = \beta_{qn}^{**} - (n - \cos\psi)\,\beta_{qn}^{*}$$
$$\nu_{qn} = \gamma_{qn}^{**} + (n + \cos\psi)\,\gamma_{qn}^{*}$$
$$\xi_{qn} = \delta_{qn}^{**} + (n + \cos\psi)\,\delta_{qn}^{*}$$
$$\lambda_{qn} = R\int_{\psi_0}^{\psi}(q_{xn} - q_{yn})\, ctg^n\frac{\psi}{2}\sin^2\psi\, d\psi$$
$$\mu_{qn} = R\int_{\psi_0}^{\psi}(q_{xn} + q_{yn})\, tg^n\frac{\psi}{2}\sin^2\psi\, d\psi .$$

Функции α^{*}_{qn} , ... , δ^{**}_{qn} вычисляются по формулам

$$f^{*}_{qn}=\int\limits_{\psi_0}^{\psi} f_{qn}\sin\psi\, d\psi, \qquad f^{**}_{qn}=\int\limits_{\psi_0}^{\psi} f^{*}_{qn}\sin\psi\, d\psi$$

в соответствии с выражениями:

$$\alpha_{qn}=\Phi_{qn}\, ctg^{n}\frac{\psi}{2}, \qquad \beta_{qn}=\Omega_{qn}\, ctg^{n}\frac{\psi}{2}$$

$$\gamma_{qn}=\Phi_{qn}\, tg^{n}\frac{\psi}{2}, \qquad \delta_{qn}=\Omega_{qn}\, tg^{n}\frac{\psi}{2}.$$

Литература

I. Гольденвейзер А.Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, т.УШ, вып.6, 1944.

2. Ахмедьянов И.С. Расчет сферической оболочки при обратно симметричном нагружении. В сб."Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Труды КуАИ, вып. 48, Куйбышев, 1971.