И. С. АХМЕДЬЯНОВ, А. В. КИРЕЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

R — радиус срединной поверхности сферической оболочки; ψ, φ — криволинейные (географические) координаты точки срединной поверхности оболочки; x, y, z — подвижная прямоугольная правая декартова система осей координат с началом на срединной поверхности оболочки; δ — толщина оболочки; u, v, w — проекции перемещения точки срединной поверхности оболочки на оси x, y, z; ε_1, ε_2, $\varepsilon_{12}=\omega$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ — компоненты деформации срединной поверхности оболочки; E, G, μ — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала оболочки; N_1, N_2, S, Q_1, Q_2, M_1, M_2, H — внутренние усилия и моменты, q_x, q_y, q_z — проекции распределенной поверхностной нагрузки на оси x, y, z; σ_i, ε_i — интенсивности напряжений и деформаций;

$$D=\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)};\quad \lambda^2=12m^2(1-\mu^2)-\mu^2;\quad m=\frac{R}{\delta};$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}+\operatorname{ctg}\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Принятые системы осей координат, а также положительные направления усилий, моментов и перемещений показаны на стр. 29.

1. Исходя из основных соотношений теории упруго-пластических деформаций, связь между напряжениями и деформациями применительно к тонким оболочкам можно представить так [1, 2]:

$$\sigma_x=\frac{2G^*}{1-\mu^*}(\varepsilon_x+\mu^*\varepsilon_y);\quad \sigma_y=\frac{2G^*}{1-\mu^*}(\varepsilon_y+\mu^*\varepsilon_x);\quad \tau_{xy}=G^*\gamma_{xy}. \tag{1}$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ — напряжения и деформации на расстоянии z от срединной поверхности оболочки;

$$\mu^*=\frac{3\mu+(1-2\mu)\Omega}{3-(1-2\mu)\Omega};\quad G^*=G(1-\Omega);\quad \Omega=1-\frac{\sigma_i}{3G\varepsilon_i}. \tag{2}$$

Подставляя в (1) значение G^* из (2), получаем

$$\sigma_x=\frac{2G}{1-\mu}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y-\eta\varepsilon_x-\theta\varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{2G}{1-\mu}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x - \eta\varepsilon_y - \theta\varepsilon_x); \tag{3}$$

$$\tau_{xy} = G(1-\Omega)\gamma_{xy},$$

где

$$\eta = 1 - \frac{1-\mu}{1-\mu^*}(1-\Omega); \quad \theta = \mu - \frac{\mu^*(1-\mu)}{1-\mu^*}(1-\Omega). \tag{4}$$

Для сферической оболочки имеем [4]

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varkappa_1 z}{1 + \frac{z}{R}}; \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_2 + \varkappa_2 z}{1 + \frac{z}{R}}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\omega + \frac{\chi}{R} z}{1 + \frac{z}{R}}. \tag{5}$$

Здесь

$$\chi = 2R\varkappa_{12} - \omega.$$

Воспользовавшись формулами для внутренних усилий и моментов [4], получим по (3) и (5)

$$N_1 = \frac{2G\delta}{1-\mu}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 - \alpha_{1p}); \quad M_1 = D\left(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2 - \frac{\beta_{1p}}{R}\right);$$

$$N_2 = \frac{2G\delta}{1-\mu}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1 - \alpha_{2p}); \quad M_2 = D\left(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1 - \frac{\beta_{2p}}{R}\right); \tag{6}$$

$$S = G\delta(\omega - \omega_p); \; H = \frac{D(1-\mu)}{2R}(\chi - \chi_p).$$

В этих выражениях

$$\alpha_{1p} = \frac{1}{2}(\eta_0\varepsilon_1 + \theta_0\varepsilon_2) + \frac{R}{4m}(\eta_1\varkappa_1 + \theta_1\varkappa_2);$$

$$\alpha_{2p} = \frac{1}{2}(\eta_0\varepsilon_2 + \theta_0\varepsilon_1) + \frac{R}{4m}(\eta_1\varkappa_2 + \theta_1\varkappa_1);$$

$$\omega_p = \frac{1}{4m}(2m\Omega_0\,\omega + \Omega_1\chi). \tag{7}$$

$$\beta_{1p} = 3m(\eta_1\varepsilon_1 + \theta_1\varepsilon_2) + \frac{3}{2}R(\eta_2\varkappa_1 + \theta_2\varkappa_2);$$

$$\beta_{2p} = 3m(\eta_1\varepsilon_2 + \theta_1\varepsilon_1) + \frac{3}{2}R(\eta_2\varkappa_2 + \theta_2\varkappa_1);$$

$$\chi_p = \frac{3}{2}(2m\Omega_1\,\omega + \Omega_2\chi),$$

причем

$$\eta_n = \int_{-1}^{1}\eta t^n\,dt, \; \theta_n = \int_{-1}^{1}\theta t^n\,dt, \quad \Omega_n = \int_{-1}^{1}\Omega t^n\,dt;$$

$$t = \frac{2z}{\delta} \; (n = 0, 1, 2). \tag{8}$$

2. Для вывода уравнений, определяющих внутренние усилия и моменты в оболочке, воспользуемся уравнениями равновесия [4, 5]

$$\frac{\partial N_1}{\partial \psi} + (N_1 - N_2)\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial S}{\partial \varphi} + Q_1 = -Rq_x; \tag{9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \psi} + 2S\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + Q_2 = -Rq_y; \tag{10}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \psi} - N_1 - N_2 + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + Q_1\operatorname{ctg}\psi = -Rq_z; \tag{11}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \psi} + (M_1 - M_2)\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial H}{\partial \varphi} - RQ_1 = 0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} + 2H\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - RQ_2 = 0 \tag{13}$$

и соотношениями неразрывности деформаций срединной поверхности сферической оболочки [3]

$$\frac{\partial}{\partial \psi}(\omega - \chi) + 2(\omega - \chi)\operatorname{ctg}\psi + \frac{2}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(R\varkappa_1 - \varepsilon_1) = 0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}(R\varkappa_2 - \varepsilon_2) + (R\varkappa_2 - \varepsilon_2)\operatorname{ctg}\psi - (R\varkappa_1 - \varepsilon_1)\operatorname{ctg}\psi +$$

$$+ \frac{1}{2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\omega - \chi) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \psi}\sin\psi - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos\psi - \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\right] + R(\varkappa_1 + \varkappa_2)\sin\psi +$$

$$+ \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varphi} - \omega\cos\psi\right) = 0. \tag{16}$$

Внося в (14) и (15) значения деформаций из (6), получим после преобразований с учетом (9), (10), (12) и (13)

$$Q_1 = -\frac{1-\mu}{1+\lambda^2}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(N - \frac{12m^2}{R}M\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_x + Q_{1p}; \tag{17}$$

$$Q_2 = -\frac{1-\mu}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(N - \frac{12m^2}{R}M\right) - \frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}Rq_y + Q_{2p}.$$

Здесь

$$Q_{1p} = \frac{E\delta(1-\mu)}{1+\lambda^2}\left[\frac{\partial}{\partial \psi}(R\varkappa_{2p} - \varepsilon_{2p}) + (R\varkappa_{2p} - \varepsilon_{2p})\operatorname{ctg}\psi -\right.$$

$$\left. - (R\varkappa_{1p} - \varepsilon_{1p})\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\omega_p - \chi_p)\right]; \tag{18}$$

$$Q_{2p} = \frac{E\delta(1-\mu)}{1+\lambda^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \psi}(\omega_p - \chi_p) + (\omega_p - \chi_p)\operatorname{ctg}\psi +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(R\varkappa_{1p} - \varepsilon_{1p})\right];$$

$$N = N_1 + N_2; \quad M = M_1 + M_2; \tag{19}$$

$$\varepsilon_{1p} = \frac{1}{2}(\varepsilon_p + \zeta_p); \qquad \varepsilon_{2p} = \frac{1}{2}(\varepsilon_p - \zeta_p);$$

$$R\varkappa_{1p} = \frac{1}{2}(\varkappa_p + \tau_p); \quad R\varkappa_{2p} = \frac{1}{2}(\varkappa_p - \tau_p); \tag{20}$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{4m}(2m\xi_0\varepsilon + \xi_1\varkappa); \quad \zeta_p = \frac{1}{4m}(2m\Omega_0\zeta + \Omega_1\tau);$$

$$\varkappa_p = \frac{3}{2}(2m\xi_1\varepsilon + \xi_2\varkappa); \quad \tau_p = \frac{3}{2}(2m\Omega_1\zeta + \Omega_2\tau); \tag{21}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \quad \zeta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2;$$

$$\varkappa = R(\varkappa_1 + \varkappa_2); \quad \tau = R(\varkappa_1 - \varkappa_2); \tag{22}$$

$$\xi_n = \int_{-1}^{1}\xi t^n dt; \ \xi = \frac{\eta + \Theta}{1 + \mu} = \frac{(1+\mu)\Omega}{3(1-\mu) - 2(1-2\mu)\Omega}. \tag{23}$$

Далее, совместное рассмотрение выражений (16), (9), (10), (17) и (11) приведет нас к следующим двум уравнениям:

$$(\nabla^2 + 1)N + \mu N = -12m^2(1-\mu)\frac{M}{R} -$$

$$-(1+\mu)R\left(\frac{\partial q_x}{\partial\psi} + q_x \operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial q_y}{\partial\varphi} - q_z\right) + \Gamma_p; \tag{24}$$

$$(\nabla^2 + 1)M - \mu M = (1+\mu)RN - (1+\mu)R^2 q_z + \Delta_p,$$

в которых

$$\Gamma_p = -E\delta\left[\frac{\partial^2\varepsilon_{2p}}{\partial\psi^2} + \left(2\frac{\partial\varepsilon_{2p}}{\partial\psi} - \frac{\partial\varepsilon_{1p}}{\partial\psi}\right)\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2\varepsilon_{1p}}{\partial\varphi^2} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p} + R(\varkappa_{1p} + \varkappa_{2p}) - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\omega_p}{\partial\psi} + \omega_p \operatorname{ctg}\psi\right)\right], \tag{25}$$

$$\Delta_p = -\frac{E\delta R}{12m^2}\left[R\frac{\partial^2\varkappa_{2p}}{\partial\psi^2} + R\left(2\frac{\partial\varkappa_{2p}}{\partial\psi} - \frac{\partial\varkappa_{1p}}{\partial\psi}\right)\operatorname{ctg}\psi + \frac{R}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2\varkappa_{1p}}{\partial\varphi^2} + \right.$$

$$\left. + 2R\varkappa_{1p} - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\chi_p}{\partial\psi} + \chi_p \operatorname{ctg}\psi\right)\right].$$

Для получения остальных соотношений преобразуем уравнения равновесия (9), (10), (12) и (13), еще раз используя зависимости (17). В результате придем к системе из четырех уравнений

$$\frac{\partial X}{\partial\psi} + 2X\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial Y}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{2(1-\mu)}{1+\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(N - \frac{12m^2}{R}M\right) - \frac{\partial N}{\partial\psi} - \frac{2(\lambda^2+\mu^2)}{1+\lambda^2}Rq_x - I_p; \tag{26}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\psi} + 2Y\operatorname{ctg}\psi - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial X}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{2(1-\mu)}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(N - \frac{12m^2}{R}M\right) - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial N}{\partial\varphi} - \frac{2(\lambda^2+\mu^2)}{1+\lambda^2}Rq_y - K_p;$$

$$\frac{\partial U}{\partial\psi} + 2U\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial V}{\partial\varphi} =$$

$$= -\frac{2(1-\mu)R}{1+\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(N - \frac{12m^2}{R}M\right) - \frac{\partial M}{\partial\psi} - \frac{2(1-\mu^2)}{1+\lambda^2}R^2q_x + RI_p; \quad (27)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\psi} + 2V\operatorname{ctg}\psi - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial U}{\partial\varphi} =$$

$$= -\frac{2(1-\mu)R}{(1+\lambda^2)\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(N - \frac{12m^2}{R}M\right) - \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial M}{\partial\varphi} - \frac{2(1-\mu^2)}{1+\lambda^2}R^2q_y + RK_p.$$

Здесь

$$X = N_1 - N_2; \quad Y = 2S; \quad (28)$$
$$U = M_1 - M_2; \quad V = 2H.$$

$$I_p = \frac{2E\delta(1-\mu)}{1+\lambda^2}\left[\frac{\partial}{\partial\psi}(R\varkappa_{2p} - \varepsilon_{2p}) + (R\varkappa_{2p} - \varepsilon_{2p})\operatorname{ctg}\psi - \right.$$
$$\left. - (R\varkappa_{1p} - \varepsilon_{1p})\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\omega_p - \chi_p)\right]; \quad (29)$$
$$K_p = \frac{2E\delta(1-\mu)}{1+\lambda^2}\left[\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(R\varkappa_{1p} - \varepsilon_{1p}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}(\omega_p - \chi_p) + (\omega_p - \chi_p)\operatorname{ctg}\psi\right].$$

Уравнения (17), (24), (26) и (27) образуют систему восьми уравнений относительно восьми искомых функций Q_1, Q_2, N, M, X, Y, U и V. Ее решение дает возможность определить внутренние усилия и моменты в оболочке в случае малых упруго-пластических деформаций:

$$N_1 = \frac{1}{2}(N + X); \quad N_2 = \frac{1}{2}(N - X); \quad S = \frac{1}{2}Y;$$
$$M_1 = \frac{1}{2}(M + U); \quad M_2 = \frac{1}{2}(M - U); \quad H = \frac{1}{2}V. \quad (30)$$

Заметим, что, как следует из формул (6)

$$N = \frac{2G\delta}{1-\mu}[(1+\mu)\varepsilon - (\alpha_{1p} + \alpha_{2p})]; \quad M = \frac{D}{R}[(1+\mu)\varkappa - (\beta_{1p} + \beta_{2p})];$$
$$X = \frac{2G\delta}{1-\mu}[(1-\mu)\zeta - (\alpha_{1p} - \alpha_{2p})]; \quad U = \frac{D}{R}[(1-\mu)\tau - (\beta_{1p} - \beta_{2p})]; \quad (31)$$
$$Y = 2G\delta(\omega - \omega_p); \quad V = \frac{D(1-\mu)}{R}(\chi - \chi_p).$$

Здесь

$$\alpha_{1p} + \alpha_{2p} = \frac{1}{2}(\gamma_0 + \theta_0)\varepsilon + \frac{1}{4m}(\gamma_1 + \theta_1)\varkappa;$$

$$\alpha_{1p} - \alpha_{2p} = \frac{1}{2}(\eta_0 - \theta_0)\zeta + \frac{1}{4m}(\eta_1 - \theta_1)\tau; \tag{32}$$

$$\beta_{1p} + \beta_{2p} = 3m(\eta_1 + \theta_1)\varepsilon + \frac{3}{2}(\eta_2 + \theta_2)\varkappa;$$

$$\beta_{1p} - \beta_{2p} = 3m(\eta_1 - \theta_1)\zeta + \frac{3}{2}(\eta_2 - \theta_2)\tau.$$

3. Располагая зависимостью $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, легко найти значения функции Ильюшина Ω:

$$\Omega = 1 - \frac{f(\varepsilon_i)}{3G\varepsilon_i}. \tag{33}$$

Интенсивность деформаций ε_i в общем случае определяется из соотношения [1, 2]

$$\varepsilon_i^2 = \frac{2}{9}\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)\right].$$

Отсюда, полагая

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0; \quad \varepsilon_z = -\nu_i(\varepsilon_x + \varepsilon_y); \quad \nu_i = \frac{\mu^*}{1-\mu^*} = \frac{3\mu + (1-2\mu)\Omega}{3(1-\mu) - 2(1-2\mu)\Omega},$$

получим применительно к оболочкам

$$\varepsilon_i^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}\left(\nu_i^2 + \nu_i + \frac{1}{4}\right)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2\right]. \tag{34}$$

В нашем случае будем иметь

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\varepsilon + \varkappa\dfrac{z}{R}}{1 + \dfrac{z}{R}}; \quad \varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{\zeta + \tau\dfrac{z}{R}}{1 + \dfrac{z}{R}}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\omega + \chi\dfrac{z}{R}}{1 + \dfrac{z}{R}}. \tag{35}$$

Значения ε, ζ, ω, $\varkappa$, τ и χ находятся из нелинейных соотношений (31)

$$\varepsilon = \frac{1-\mu}{E\delta}N + \varepsilon_p; \quad \zeta = \frac{1+\mu}{E\delta}X + \zeta_p;$$

$$\omega = \frac{1+\mu}{E\delta}Y + \omega_p, \tag{36}$$

$$\varkappa = \frac{12m(1-\mu)}{E\delta^2}M + \varkappa_p; \quad \tau = \frac{12m(1+\mu)}{E\delta^2}U + \tau_p;$$

$$\chi = \frac{12m(1+\mu)}{E\delta^2}V + \chi_p. \tag{37}$$

4. В заключение выведем уравнения, определяющие перемещения u, v, w точек срединной поверхности оболочки.

Исходя из соотношений [4, 5]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + w\right); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R}\left(u \operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\right);$$

$$\omega = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial\psi} - v\operatorname{ctg}\psi\right)$$

и зависимостей (36), легко находим

$$\frac{\partial u}{\partial\psi} - u\operatorname{ctg}\psi - \frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial v}{\partial\varphi} = \frac{(1+\mu)R}{E\delta}X + R\zeta_p;$$

$$\frac{\partial v}{\partial\psi} - v\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \frac{(1+\mu)R}{E\delta}Y + R\omega_p; \qquad (38)$$

$$w = \frac{(1-\mu)R}{2E\delta}N - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\psi} + u\operatorname{ctg}\psi + \frac{1}{\sin\psi}\,\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{2}R\varepsilon_p. \qquad (39)$$

5. Зависимости (17), (23), (26), (27), (38) и (39) составляют полную систему уравнений изгиба сферической оболочки за пределом упругости. Она позволяет совместно с заданными граничными условиями решить задачу об определении внутренних усилий, моментов и перемещений в сферической оболочке с учетом упруго-пластических деформаций. Для интегрирования полученных уравнений может быть применен метод упругих решений или метод конечных разностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Москва, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. «Машиностроение», 1968.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек, «Судпромгиз», 1962.
4. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, т. VIII, вып. 6, 1944.
5. Ахмедьянов И. С. Расчет сферических оболочек. «Вопросы прочности элементов авиационных конструкций». Труды КуАИ, в. 29, Куйбышев, 1967.