

Д.Н.Незванов, Х.С.Хазанов

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВАФЕЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Принятые обозначения:

R , l , t - радиус, длина и толщина полотна оболочки; m - число полуволи изогнутой поверхности на длине оболочки; n - число полных волн по окружности оболочки; w - радиальное перемещение поверхности оболочки; E , ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; N - погонные сжимающие усилия; p - внутреннее давление в оболочке.

Исследование устойчивости гладкой цилиндрической оболочки "в малом", т.е. решение, основанное на концепции Эйлера, приводит к верхней критической нагрузке - максимальной сжимающей силе, до которой возможно существование исходной цилиндрической формы равновесия. При этой нагрузке неизбежна бифуркация - появление, наряду с исходной, смежной волнообразной равновесной формы. Исследование "в большом", т.е. решение задачи об отыскании несмежных равновесных форм, дает нижнюю критическую нагрузку - минимальную сжимающую силу, способную удержать оболочку в складчатом состоянии. Строже говоря, имеется ряд нижних критических нагрузок, обусловленных множеством закритических равновесных форм.

Ни верхние, ни нижние критические нагрузки непосредственно использовать в практических расчетах нельзя. Верхние критические нагрузки недостижимы. Они соответствуют идеализированной модели оболочки, а реальная конструкция всегда подвержена воздействию целого ряда возмущающих факторов, приводящих к преждевременной потере устойчивости. Кроме того, верхние критические нагрузки не

всегда отражают сущность явления и могут привести к ошибочным выводам. Например, в задаче устойчивости при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления они не зависят от величины давления [1], что противоречит экспериментальным данным. Нижние критические нагрузки хорошо описывают характер складкообразования оболочек и лежат, как правило, ниже фактических нагрузок потери устойчивости. Но для расчетов они также непригодны, прежде всего, из-за своей многозначности.

Однако, несмотря на то, что ни верхние, ни нижние критические нагрузки в чистом виде, без соответствующих поправок, для расчетов неприемлемы, тем не менее в своей совокупности они дают именно тот диапазон усилий, в пределах которого происходит складкообразование оболочек. Ограничивая этот диапазон снизу и сверху, они тем самым позволяют предсказывать область действительных нагрузок потери устойчивости. Следуя терминологии работы [2], будем называть эту область нагружения "областью неустойчивости". Введение понятия области устойчивости способствует упорядочению представления о ней способности оболочек и позволяет по-иному подойти к решению некоторых задач. Например, определение и исследование области неустойчивости может служить методом анализа несущей способности подкрепленных оболочек. В этом случае для выявления роли как-нибудь геометрического параметра достаточно изучить поведение области неустойчивости при его изменении. Рассмотрим с этих позиций задачу об устойчивости вафельной цилиндрической оболочки, нагруженной осевым сжатием и внутренним давлением. Для определения области неустойчивости, т.е. для одновременного вычисления верхних и нижних критических нагрузок, воспользуемся каким-либо единым приемом, например, методом Ритца. Способ определения этим методом нижних критических нагрузок вафельных оболочек изложен в работах [3, 4]. Принимаемая конструктивно-ортоотропная модель оболочки и ее жесткостные свойства описаны в [4]. Там же приведены используемые соотношения нелинейной теории несимметрично-ортоотропных цилиндрических оболочек. При решении функция прогиба принимается в виде двойного усеченного ряда

$$W = \sum_{q=0}^{q_n} \sum_{k=0}^{k_n} W_{qk} \cos q\alpha x \cos k\beta y, \quad (1)$$

где $q = 0; 1; 2; 3 \dots q_n$, $k = 0; 1; 2; 3 \dots k_n$,
 $q \cdot k = 0; 2; 4; 6 \dots$, q_n, k_n - принятые предельные значения для q и k , W_{qk} - амплитуды прогиба,

$$\alpha = \frac{\pi m}{l}, \quad \beta = \frac{n}{R}$$

Получаемое выражение для безразмерного параметра полной потенциальной энергии оболочки $\bar{\Xi}$ приведено в работе [5]. Условие минимума энергии дает систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \bar{W}_{qk}} = \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \nu^2} = 0, \quad (2)$$

из решения которой определяются нижние критические нагрузки. Параметры η и ν^2 характеризуют форму вмятин, а \bar{W}_{qk} - их глубину. В уравнениях (2) обозначено:

$$\eta = \beta^2 R t \bar{D}_0, \quad \nu^2 = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt[4]{\frac{\bar{A}_{22}}{\bar{A}_{11}}}, \quad \bar{W}_{qk} = \frac{W_{qk}}{t \bar{D}_0}$$

$$\bar{D}_0 = \sqrt{12(1-\nu^2)\bar{A}_{22}\bar{D}'_{22}}, \quad \bar{A}_{ij} = EtA_{ij}, \quad \bar{D}'_{ij} = \frac{D'_{ij}}{Et^3}$$

Остальные обозначения здесь и далее соответствуют работам [4, 5].

Задачу определения верхних критических нагрузок ортотропных цилиндрических оболочек рассматривали многие авторы: Х.М.Муштарри, С.Н.Кан, В.В.Кабанов и др. Непосредственно вафельным оболочкам были посвящены исследования О.И.Теребушко [6], В.В.Кабанова [7], В.Т.Лизина [8]. Ниже приводится решение, выполненное методом Ритца с применением тех же нелинейных геометрических соотношений, которые использовались при определении нижних критических нагрузок.

Рассмотрим два вида складкообразования - осесимметричное и асимметричное. В первом случае функцию прогиба примем в форме

$$W = W_{00} + W_{10} \cos \alpha x.$$

Выражение для полной потенциальной энергии оболочки согласно [5] запишется в виде

$$\bar{\Xi} = -\bar{N}^2 - \bar{N}_p^2 + 2\varphi_0 \bar{N}\bar{N}_p - \frac{1}{2}\bar{N}\mu\bar{W}_{10}^2 + \frac{\varphi_1}{24(1-\nu^2)}\mu^2\bar{W}_{10}^2 + \frac{1}{2}(1-\varphi_1\mu)^2\bar{W}_{10}^2.$$

Здесь обозначено:

$$\bar{N} = \frac{NR}{Et^2} \sqrt{\frac{\bar{A}_{11}}{12(1-\nu^2)\bar{D}'_{22}}}, \quad \bar{N}_p = \frac{P}{E} \left(\frac{R}{t}\right)^2 \sqrt{\frac{\bar{A}_{22}}{12(1-\nu^2)\bar{D}'_{22}}}, \quad \mu = \alpha^2 R t \bar{D}_0 \sqrt{\frac{\bar{A}_{22}}{\bar{A}_{11}}}$$

Условие минимума энергии дает

$$\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \bar{W}_{10}} = \frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial \mu} = 0. \quad (3)$$

Решая уравнение (3), получим

$$\bar{N} = 2 \left[\sqrt{\frac{\varphi_7}{12(1-\nu^2)} + \varphi_1^2} - \varphi_1 \right] \quad \text{и} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varphi_7}{12(1-\nu^2)} + \varphi_1^2}}$$

Для асимметричного складкообразования выражение для W запишем в форме

$$W = W_{00} + W_{11} \cos \alpha x \cos \beta y.$$

Потенциальная энергия оболочки будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} = & -\bar{N}^2 - \bar{N}_p^2 + 2\varphi_6 \bar{N} \bar{N}_p - \frac{1}{4} \bar{N} \eta \nu^2 \bar{W}_{11}^2 + \frac{1}{4} \bar{N}_p \eta \bar{W}_{11}^2 + \frac{V_1}{48(1-\nu^2)} \eta^2 \bar{W}_{11}^2 + \\ & + \frac{(\eta V_3 - \nu^2)^2}{4V_2} \bar{W}_{11}^2 + \frac{1}{128} (1 + \nu^4) \eta^2 \bar{W}_{11}^4. \end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$V_1 = \varphi_7 \nu^4 + 2\varphi_5 \sqrt{\varphi_7} \nu^2 + 1, \quad V_2 = \nu^4 + 2\varphi_4 \nu^2 + 1, \quad V_3 = \varphi_1 \nu^4 + \varphi_2 \nu^2 + \varphi_3.$$

При заданных нагрузках \bar{N} и \bar{N}_p значения параметров складкообразования \bar{W}_{11} , η и ν ищутся из решения системы уравнений вида (2).

Как показали вычисления, кривая \bar{N} (в функции от \bar{W}_{11} , η или ν) не имеет минимума, что говорит о бесконечном множестве решений. Однако, исходя из физического смысла верхней критической нагрузки, как нагрузки появления смежной равновесной формы, следует положить $\bar{W}_{11} \rightarrow 0$ и из множества \bar{N} выбрать значение, соответствующее этому условию. Математически это равнозначно решению уравнений (2) без членов, содержащих \bar{W}_{11} , относительно η , ν и \bar{N} (при заданном \bar{N}_p). Система (2) в этом случае сводится к следующим трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \bar{N}_p \frac{\nu}{V_4} - \frac{\nu^3}{V_4^2} \left[\frac{\varphi_7 \nu^4 - 1}{12(1-\nu^2)} + \frac{(V_4 - V_3)^2 (1-\nu^4)}{V_2^2} - \frac{2(V_4 - V_3)(\varphi_1 \nu^4 - \varphi_3)}{V_2} \right] &= 0 \\ \eta = \frac{\nu^2}{V_4}, \quad \bar{N} = \bar{N}_p \frac{1}{\nu^2} + \frac{2(V_4 - V_3)}{V_2}, & \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$V_4 = \sqrt{\frac{V_1 V_2}{12(1-\nu^2)}} + V_3^2$$

Решение уравнений (4) дает η , ν и искомое значение \bar{N} верхней критической нагрузки асимметричного складкообразования.

Полученные выше общие выражения соответствуют произвольным ортотропным цилиндрическим оболочкам. Перейдем к рассмотрению конкретной вафельной оболочки, элемент которой изображен на рис. 1. Пусть для упрощения продольные и кольцевые ребра имеют одинаковую ширину и образуют квадратную клетку. Если принять отношение τ к δ постоянным (при вычислениях принято 0,1), то степень подкрепленности оболочки будет определяться двумя безразмерными параметрами:

$$\bar{S} = \frac{S}{\delta} \quad \text{и} \quad \bar{h} = \frac{h}{t}$$

Запишем критические напряжения в форме

$$\sigma_{кр} = C \frac{E t}{R}$$

Тогда решение задачи сведется к определению коэффициентов устойчивости C^H (для нижних критических нагрузок), C^{AC} и C^{OC} (соответственно для верхних критических нагрузок асимметричной и осесимметричной формы складкообразования). Следует отметить, что значения C^H зависят от формы изогнутой поверхности оболочки, т.е. от вида функции прогиба. В данном случае рассмотрим два варианта решения задачи - с 4 и 9 членами в выражении (1). В первом варианте $q + k = 0; 2$, во втором $q + k = 0; 2; 4$. Соответствующие значения коэффициентов устойчивости обозначим через C_1^H и C_2^H . Для частного случая гладкой оболочки. $C_1^H = 0,182$, $C_2^H = 0,099$, $C^{AC} = C^{OC} = 0,605$. Результаты вычислений на ЭВМ приведены ниже. На графиках рис. 2 и 3 показано изменение коэффициентов C^H , C^{AC} и заключенной между ними области неустойчивости (заштрихованная зона) при увеличении ширины и высоты подкреплений. Значения C^{OC} , превышающие C^{AC} , на рисунках не приводятся. Изменение области неустойчивости вафельной оболочки в зависимости от величины внутреннего давления показано на рис. 4.

Анализ характера изменения области неустойчивости дает возможность судить о рациональных размерах подкреплений. Резкий рост области неустойчивости при изменении \bar{S} в диапазоне $0 + 0,05$ и незначительное ее повышение при $\bar{S} > 0,05$ говорит о целесообразности проектирования оболочек с узкими ребрами. Высота ребер в диапазоне ее малых значений слабо влияет на область неустойчивости, лишь при дальнейшем увеличении коэффициенты C возрастают. Следовательно, в подобных конструкциях выгоднее применять высокие подкрепления ($\bar{h} > 2$). Повышение области неустойчивости в зависимости от \bar{N}_p (рис. 4) свидетельствует об увеличении несущей

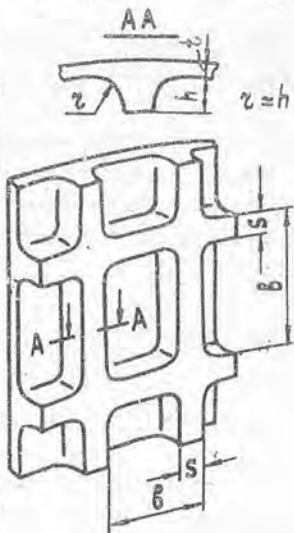


Рис. 1

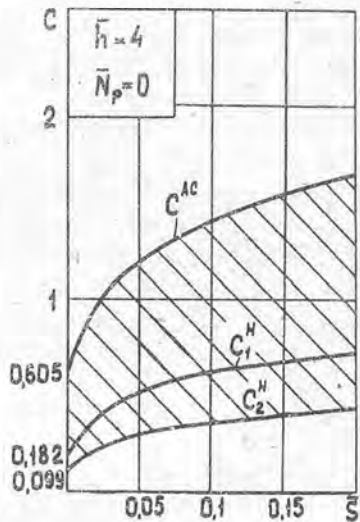


Рис. 2

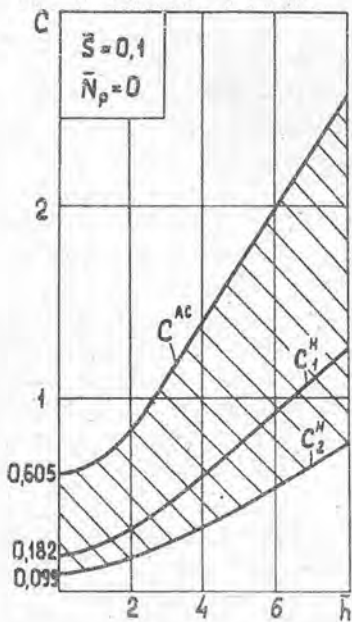


Рис. 3

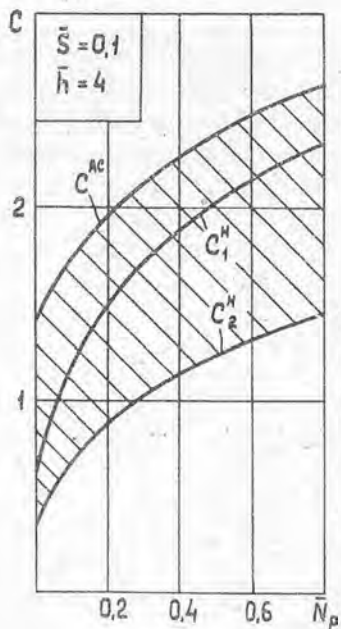


Рис. 4

способности вафельных оболочек с ростом внутреннего давления, причем более интенсивное повышение критических напряжений наблюдается в диапазоне малых давлений.

Таким образом, в рассмотренной задаче сопоставление верхних и нижних критических нагрузок и исследование характера области неустойчивости позволяет получить качественные и количественные данные о влиянии внутреннего давления и структуры подкреплений вафельной оболочки на ее несущую способность.

Л и т е р а т у р а

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Изд-во "Наука", Москва, 1967.
2. Гусев В.В., Маневич Л.И. Исследование области неустойчивости коротких продольно-подкрепленных оболочек при осесимметричных нагрузках. Сб. "Вопросы прочности, надежности и разрушения механических систем", Труды ДГУ, Днепропетровск, 1969.
3. Теребушко О.И. К расчету на устойчивость и проектирование цилиндрических подкрепленных оболочек. Сб. "Расчет пространственных конструкций", вып. УП, Москва, 1962.
4. Незванов Д.Н. Устойчивость цилиндрических оболочек вафельного типа при осевом сжатии. Сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций", Труды КуАИ, вып. 48, Куйбышев, 1971.
5. Незванов Д.Н. О выборе поверхности отсчета при определении жесткостных характеристик конструктивно-ортоотропных оболочек. Сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций", Труды КуАИ, вып. 60, Куйбышев, 1973.
6. Теребушко О.И. О влиянии расположения подкрепляющих цилиндрическую оболочку ребер на величину критической нагрузки. Теория пластин и оболочек. Труды УИ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Изд-во "Наука", Москва, 1966.
7. Кабанов В.В. Устойчивость эксцентрично подкрепленных круговых цилиндрических оболочек при сжатии. ИВУЗ, серия "Авиационная техника", № 1, 1971.
8. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Расчет на прочность и проектирование оболочковых конструкций минимального веса. Книга 2, ГОНТИ-Д, 1973.