

И.С. Ахмедьянов

К РАСЧЕТУ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ  
ЧЕРЕЗ УПРУГИЙ ШПАНГОУТ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

В работе приводятся некоторые соотношения, необходимые для расчета сферической оболочки, нагруженной через упругий шпангоут сосредоточенной силой или сосредоточенным моментом, действующими в некоторой меридиональной плоскости. При этом используются расчетные формулы для сферической оболочки и упругого кольца, полученные в [1, 2] (с сохранением всех основных обозначений).

I. Рассмотрим сферическую оболочку, ограниченную параллелями  $\psi = \psi_1$  и  $\psi = \psi_2$  и подкрепленную тонким упругим кольцом (шпангоутом) постоянного сечения (рис. I).

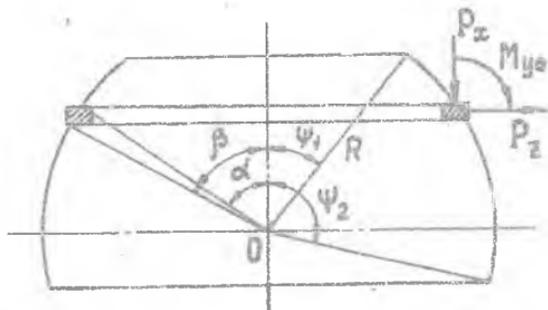


Рис. I.

Будем предполагать плоскость кольца параллельной плоскости опорной параллели оболочки. Пусть к кольцу в сечении  $\psi = \pi$  приложены сосредоточенные силы  $P_x$ ,  $P_z$  и крутящий момент  $M_{ye}$ . При этом напряженное и деформированное состояние эле-

темы будет, очевидно, симметричным относительно плоскости  $\varphi = 0$ .

Обозначим через  $P_x, P_y, P_z$  и  $m_x, m_y, m_z$  суммарные усилия и моменты взаимодействия кольца и оболочки:

$$P_x = P_x^{(1)} + P_x^{(2)}, \quad P_y = P_y^{(1)} + P_y^{(2)}, \quad P_z = P_z^{(1)} + P_z^{(2)}$$

$$m_x = m_x^{(1)} + m_x^{(2)}, \quad m_y = m_y^{(1)} + m_y^{(2)}, \quad m_z = m_z^{(1)} + m_z^{(2)}$$

Здесь индексом 1 обозначены нагрузки, передающиеся на кольцо сверху, а индексом 2 - нагрузки, приложенные снизу.

Составив схему нагружения кольца (рис. 2), будем иметь:

$$r p_x^{(1)}(\varphi) = -R [N_1(\alpha, \varphi) \sin \alpha - Q_1(\alpha, \varphi) \cos \alpha] \sin \alpha$$

$$r p_y^{(1)}(\varphi) = -RS(\alpha, \varphi) \sin \alpha$$

$$r p_z^{(1)}(\varphi) = -R [N_1(\alpha, \varphi) \cos \alpha + Q_1(\alpha, \varphi) \sin \alpha] \sin \alpha$$

$$r m_x^{(1)}(\varphi) = RH(\alpha, \varphi) \sin^2 \alpha + b_1 r p_y^{(1)}(\varphi)$$

$$r m_y^{(1)}(\varphi) = -RM_1(\alpha, \varphi) \sin \alpha - b_1 r p_x^{(1)}(\varphi) + a_1 r p_z^{(1)}(\varphi)$$

$$r m_z^{(1)}(\varphi) = RH(\alpha, \varphi) \sin \alpha \cos \alpha - a_1 r p_y^{(1)}(\varphi)$$

$$r p_x^{(2)}(\varphi) = R [N_1(\beta, \varphi) \sin \beta - Q_1(\beta, \varphi) \cos \beta] \sin \beta \quad (I)$$

$$r p_y^{(2)}(\varphi) = RS(\beta, \varphi) \sin \beta$$

$$r p_z^{(2)}(\varphi) = R [N_1(\beta, \varphi) \cos \beta + Q_1(\beta, \varphi) \sin \beta] \sin \beta$$

$$r m_x^{(2)}(\varphi) = -RH(\beta, \varphi) \sin^2 \beta - b_2 r p_y^{(2)}(\varphi)$$

$$r m_y^{(2)}(\varphi) = RM_1(\beta, \varphi) \sin \beta + b_2 r p_x^{(2)}(\varphi) - a_2 r p_z^{(2)}(\varphi)$$

$$r m_z^{(2)}(\varphi) = -RH(\beta, \varphi) \sin \beta \cos \beta + a_2 r p_y^{(2)}(\varphi)$$

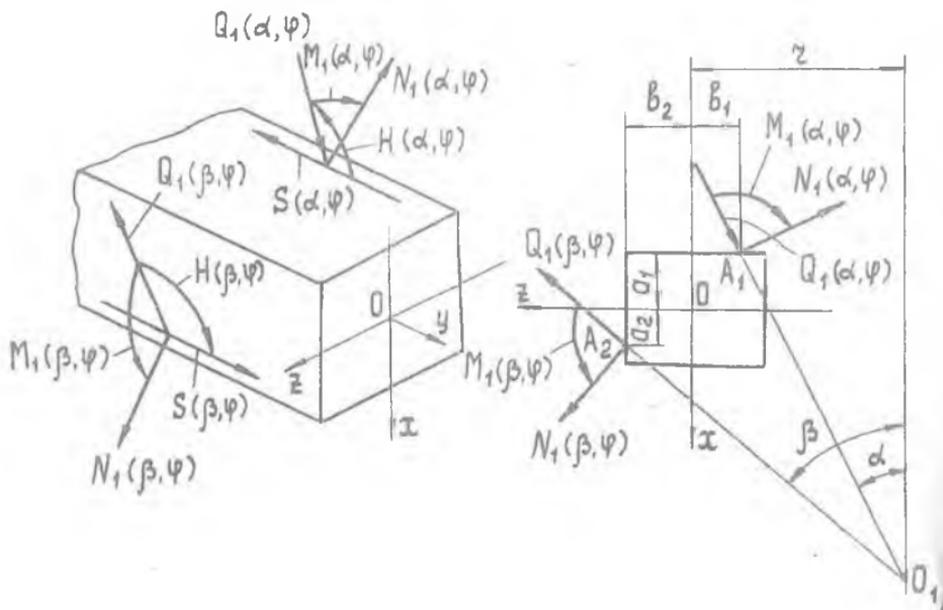


Рис. 2.

Подставив в (I) выражения для  $N_1$ ,  $S$ ,  $Q_1$ ,  $M_1$  и  $H$  из [I], можно усилия  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  и моменты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  представить в следующем виде:

$$P_x (P_z, m_y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{xn} (P_{zn}, P_{yn}) \cos n\varphi$$

$$P_y (m_x, m_z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{yn} (m_{xn}, m_{zn}) \sin n\varphi.$$

2. Кольцо, подкрепляющее оболочку, разделяет ее на две части - верхнюю ( $\psi_1 \leq \psi \leq \alpha$ ) и нижнюю ( $\beta \leq \psi \leq \psi_2$ ). Для расчета усилий, моментов и перемещений в нижней оболочке можно использовать формулы (1), (2), (5), (6) и (8) из [I]. Эти формулы применимы и для верхней оболочки, если входящие в них произвольные постоянные обозначить иначе, например, через  $A'_{1n}$ ,  $B'_{1n}$ ,  $A'_{2n}$ ,  $B'_{2n}$ ,  $C'_n$ ,  $D'_n$ ,  $C'^*_{n1}$  и  $D'^*_{n1}$ .

В дальнейшем будем считать верхнюю оболочку замкнутой в вершине ( $\psi_1 = 0$ ). В этом случае из условия конечности усилий, моментов и перемещений легко получить, что

$$A'_{2n} = B'_{2n} = 0, \quad B'_n = 0, \quad D'_n = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 0;$$

$$D'^*_{n1} = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 2; \quad C'_0 = 0, \quad C'_{11} = 0.$$

Отличными от нуля будут постоянные  $A'_{1n}$ ,  $B'_{1n}$ ,  $C_n^*$  ( $n \geq 0$ ),  $C'_n$ ,  $A'_{2n}$  ( $n \geq 2$ ) и  $D'_1$ .

Для нижней оболочки ( $\beta \leq \psi \leq \psi_2$ ) будем иметь [1]:

$$2C_0 = -\frac{P_x}{2\pi R E \delta}, \quad C_1 + D_1 = \frac{M_{\psi_0} - P_z R \cos \beta}{\pi R^2 E \delta (1 + \kappa)}, \quad C_1 - D_1 = \frac{P_z}{\pi R E \delta}$$

Здесь

$$\kappa = \frac{1}{12 m^2}$$

Значения  $A'_{1n}$ ,  $B'_{1n}$ ,  $A'_{2n}$ ,  $B'_{2n}$ ,  $C_n^*$  ( $n \geq 0$ ),  $C_n$ ,  $D_n$  ( $n \geq 2$ ),  $D_1^*$  ( $n \geq 1$ ), а также других постоянных, относящихся к верхней части оболочки, определяются из равенства перемещений кольца и оболочки в месте их соединения и условий закрепления системы по нижнему краю  $\psi = \psi_2$ .

3. Запишем условия совместности перемещений кольца и оболочки:

$$\begin{aligned} 1) U^{(1)}(\varphi) &= -U_z(\alpha, \varphi), & 2) V^{(1)}(\varphi) &= v(\alpha, \varphi) \\ 3) W^{(1)}(\varphi) &= U_r(\alpha, \varphi), & 4) \Theta(\varphi) &= \psi_1(\alpha, \varphi) \\ 5) U^{(2)}(\varphi) &= -U_z(\beta, \varphi), & 6) V^{(2)}(\varphi) &= v(\beta, \varphi) \\ 7) W^{(2)}(\varphi) &= U_r(\beta, \varphi), & 8) \Theta(\varphi) &= \psi_1(\beta, \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:

$U^{(1)}$ ,  $V^{(1)}$ ,  $W^{(1)}$ ,  $U^{(2)}$ ,  $V^{(2)}$ ,  $W^{(2)}$  — перемещения точек  $A_1$  и  $A_2$  кольца (точек сопряжения с верхней и нижней оболочками, рис. 2);  $U_z$ ,  $U_r$  — осевое и радиальное перемещения точек срединной поверхности оболочки (рис. 1 из [1]).

Приняв гипотезу плоского распределения перемещений по сечению кольца, будем иметь:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U - b_1 \theta, & V^{(1)} &= V - a_1 \varphi_z + b_1 \varphi_x, & W^{(1)} &= W + a_1 \theta \\ U^{(2)} &= U + b_2 \theta, & V^{(2)} &= V + a_2 \varphi_z - b_2 \varphi_x, & W^{(2)} &= W - a_2 \theta \end{aligned}$$

В этих выражениях:

$U$ ,  $V$ ,  $W$  — компоненты полного перемещения точки осевой линии кольца по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 1 из [2]);

$\varphi_x$ ,  $\varphi_z$  — углы поворота сечения кольца вокруг осей  $x$  и  $z$ , определяемые формулами [3]:

$$\varphi_x = \frac{1}{r} \left( \frac{dW}{d\varphi} - V \right), \quad \varphi_z = -\frac{1}{r} \frac{dU}{d\varphi}$$

Перемещения  $u_z$  и  $u_r$  равны (рис. I из [ I ]):

$$u_z = -u \sin \psi + w \cos \psi$$

$$u_r = u \cos \psi + w \sin \psi$$

или

$$u_z(u_r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(u_{rn}) \cos n\psi, \quad (3)$$

где

$$u_{zn} = -u_n \sin \psi + w_n \cos \psi$$

$$u_{rn} = u_n \cos \psi + w_n \sin \psi.$$

Представив выражения (17), (25), (28) и (19) из [ 2 ] для перемещений  $U$ ,  $V$ ,  $W$  и  $\theta$  в форме рядов

$$U(W, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(W_n, \theta_n) \cos n\psi, \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin n\psi$$

и используя (3), условия совместности перемещений (2) можно привести к следующему виду:

$$u_n(\alpha) \sin \alpha - w_n(\alpha) \cos \alpha = U_n - b_1 \theta_n$$

$$v_n(\alpha) = \left(1 - \frac{b_1}{\alpha}\right) V_n - \frac{n}{\alpha} (a_1 U_n + b_1 W_n)$$

$$u_n(\alpha) \cos \alpha + w_n(\alpha) \sin \alpha = W_n + a_1 \theta_n$$

$$v_{1n}(\alpha) = \theta_n \quad (4)$$

$$u_n(\beta) \sin \beta - w_n(\beta) \cos \beta = U_n + b_2 \theta_n$$

$$v_n(\beta) = \left(1 + \frac{b_2}{\beta}\right) V_n + \frac{n}{\beta} (a_2 U_n + b_2 W_n)$$

$$u_n(\beta) \cos \beta + w_n(\beta) \sin \beta = W_n - a_2 \theta_n$$

$$v_{1n}(\beta) = \theta_n$$

Будучи записанными в развернутом виде, эти условия для всех  $n \geq 2$  составят систему 8 уравнений относительно 12 неизвестных  $A'_{1n}, B'_{1n}, C'_n, C_n^{*1}$  и  $A_{1n}, B_{1n}, A_{2n}, B_{2n}, C_n, D_n, C_n^*, D_n^*$ . Недостающие четыре уравнения получим, составив граничные условия в соответствии с характером закрепления оболочки по краю  $\psi = \psi_2$ .

При  $n=1$  в системе (4), дополненной четырьмя граничными условиями для края  $\psi = \psi_2$ , неизвестными будут  $A'_1, B'_1, C_1^{*1}, D_1^*, A_{11}, B_{11}, A_{21}, B_{21}, C_1, D_1$  и  $\tilde{A}_2, \tilde{B}_1$ . И, наконец, для  $n=0$  будем иметь всего 9 уравнений (6 уравнений совместности деформаций и 3 граничных условия по краю  $\psi = \psi_2$ ) относительно 9 неизвестных:  $A'_0, B'_0, C_0^{*1}, A_{10}, B_{10}, A_{20}, B_{20}, C_0^*$  и  $\tilde{A}_6, \tilde{B}_1$ .

Отметим, что через  $\tilde{A}_2, \tilde{A}_6$  и  $\tilde{B}_1$  обозначены постоянные, относящиеся к кольцу и определяющие его перемещения как твердого тела [2].

4. Приведем результаты численного расчета полусферической оболочки, жестко закрепленной снизу и нагруженной через упругое кольцо вертикальной сосредоточенной силой  $P_x = 1000$  кг (рис. 3).

В качестве исходных данных были приняты следующие параметры оболочки и кольца \*):

$$R = 109,8 \text{ см}, \quad \delta = 0,3 \text{ см}, \quad \mu = 0,3,$$

$$\lambda = 1209,5, \quad E = 7 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

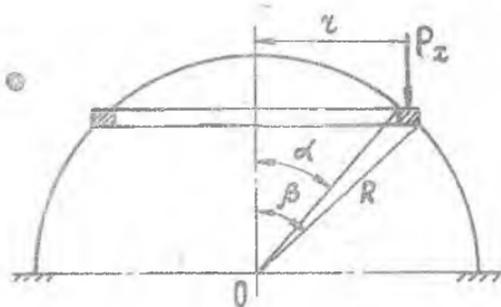


Рис. 3.

\*. Составление программы для ЭВМ и все вычисления были выполнены инж. И.А. Будячевским.

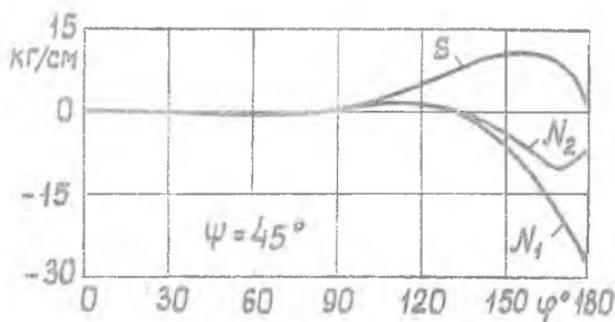


Рис. 4

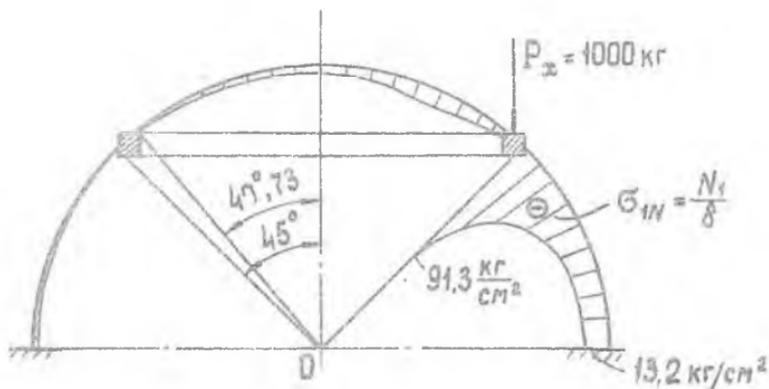


Рис. 5

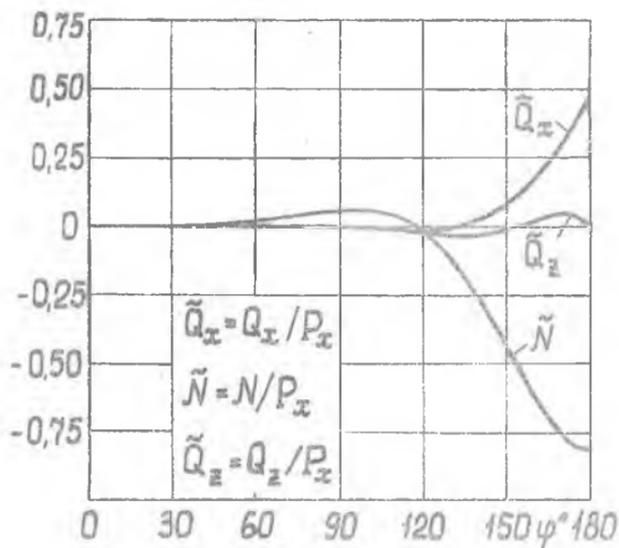


Рис. 6

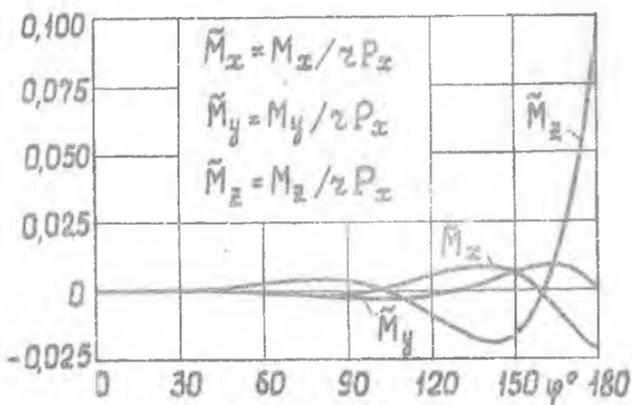


Рис. 7

$$\begin{aligned} \alpha &= 40^{\circ} 43' 39'' , & \beta &= 45^{\circ} , \\ \tau &= 74,64 \text{ см} , & F &= 57,6 \text{ см}^2 , \\ B &= 4,032 \cdot 10^7 \text{ кг} , & B_x &= 1,210 \cdot 10^8 \text{ кг см}^2 , \\ B_z &= 3,097 \cdot 10^8 \text{ кг см}^2 , & C &= 1,137 \cdot 10^8 \text{ кг см}^2 , \\ a_1 &= 2,57 \text{ см} , & b_1 &= 3 \text{ см} , & a_2 &= 3 \text{ см} , & b_2 &= 3 \text{ см} . \end{aligned}$$

Поперечное сечение кольца - прямоугольник со сторонами 6 и 9,6 см.

Расчеты, выполненные на ЭВМ, привели к результатам, представленным на рис. 4 - 7.

При проведении расчетов были использованы приближенные выражения для функций  $\sigma_{1n}$ ,  $\tau_{1n}$ ,  $\sigma_{2n}$  и  $\tau_{2n}$ , приведенные в [4].

#### Л и т е р а т у р а

1. Ахмедьянов И.С. Расчет сферической оболочки, нагруженной через эксцентрично расположенную жесткую шайбу. Труды КуАИ, вып.60, Куйбышев, 1973.
2. Ахмедьянов И.С. Расчет кругового кольца на произвольную пространственную нагрузку. Труды КуАИ, вып. 48, Куйбышев, 1971.
3. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Джарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III, Машгиз, 1959.
4. Ахмедьянов И.С. Расчет сферической оболочки при обратно симметричном нагружении. Труды КуАИ, вып. 48, Куйбышев, 1971.