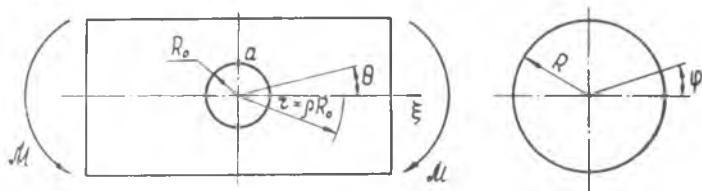


Х. С. Хазанов

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Рассматриваются случаи, когда достаточно длинная цилиндрическая оболочка (радиус средней поверхности R , толщина h) с круглым отверстием радиуса R_0 нагружена по торцам усилиями, вызывающими ее изгиб.

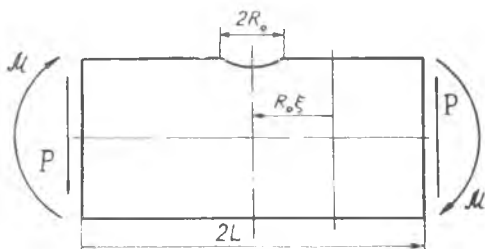


Фиг. 1.

Задача 1. Чистый изгиб оболочки в плоскости, перпендикулярной плоскости ее симметрии (фиг. 1): по торцам оболочки приложены нормальные силы N , приводящие к моменту M .

Задача 2. Обратный симметричный изгиб оболочки в плоскости ее симметрии (фиг. 2): по торцам оболочки в ее срединной поверхности приложены касательные силы T с равнодействующей P и нормальные силы N , эквивалентные моменту $M = PL$.

Напряженное состояние оболочки с отверстием условно разбивается на основное, подсчитанное для оболочки без отверстия при



Фиг. 2.

заданной внешней нагрузке, и дополнительное, в котором по контуру отверстия прикладываются силы, равные по величине и обратные по направлению соответствующим усилиям основного состояния.

Для исследования дополнительного состояния используется решение однородного дифференциального уравнения пологой цилиндрической оболочки, записанное в полярных на развертке цилиндра координатах с началом в центре отверстия. Для различных случаев симметрии напряженного состояния подобные решения приведены в работе [1]. Применительно к задаче 1 имеем:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) &= \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \bar{\alpha}_{n\nu}(x) - B_n \bar{\beta}_{n\nu}(x)] \sin \nu\theta, \\ \Phi(\rho, \theta) &= \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \bar{\beta}_{n\nu}(x) + B_n \bar{\alpha}_{n\nu}(x)] \sin \nu\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где ψ — нормальное к срединной поверхности перемещение; Φ — функция напряжений; $x = \omega\rho$; $\rho = \frac{r}{R_0}$, θ — полярные на развертке цилиндра координаты (угол θ отсчитывается от образующей). Параметр кривизны ω принимает при коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$ значение

$$\omega = 0,6427 \frac{R_0}{\sqrt{Rn}}. \quad (2)$$

Функции, входящие в (1), определяются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{n\nu}(x) &= -(-1)^\nu \frac{2}{\pi} \{ \text{kei}_{n-\nu} y (\text{ber}_{n-\nu} y + \text{ber}_{n+\nu} y) + \\ &\quad + \text{ker}_n y (\text{bei}_{n-\nu} y + \text{bei}_{n+\nu} y) \}, \\ \bar{\beta}_{n\nu}(x) &= (-1)^\nu \frac{2}{\pi} \{ \text{kei}_n y (\text{bei}_{n-\nu} y + \text{bei}_{n+\nu} y) + \\ &\quad + \text{ker}_n y (\text{ber}_{n-\nu} y + \text{ber}_{n+\nu} y) \}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $y = x\sqrt{2}$.

Задаче 2 соответствует решение

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) &= \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^* \bar{\alpha}_{n\nu}^*(x) - B_n^* \bar{\beta}_{n\nu}^*(x)] \cos \nu\theta, \\ \Phi(\rho, \theta) &= \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^* \bar{\beta}_{n\nu}^*(x) + B_n^* \bar{\alpha}_{n\nu}^*(x)] \cos \nu\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения для $\bar{\alpha}_{n\nu}^*(x)$ и $\bar{\beta}_{n\nu}^*(x)$ приведены в [2]. Они могут быть получены также из соответствующих формул (3), в которых перед вторыми членами в круглых скобках знак плюс следует заменить на минус.

Ряды для усилий в сечениях оболочки*, определяемые по решениям (1) и (4), приведены в [1].

Постоянные A_n и B_n решений (1) и (4) определяются из граничных условий. По контуру отверстия ($\rho=1$) имеем

$$M_\rho = 0, Q_\rho^* = 0, N_\rho = -N_\rho^0, T_{\rho\theta} = -T_{\rho\theta}^0. \quad (5)$$

Левые части равенств (5) представляют собой изгибающий момент, обобщенную перерезывающую силу, а также нормальные и касательные силы в срединной поверхности, определяемые через ряды (1) или (4). В правых частях последних двух равенств (5) записаны с обратным знаком нормальные и касательные силы для основного напряженного состояния соответствующей задачи.

Решение (1) тождественно, при любых A_n и B_n , удовлетворяет условиям однозначности перемещений, а для (4) имеет место зависимость

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n) = 0. \quad (6)$$

Детальный анализ систем алгебраических уравнений относительно постоянных A_n и B_n , вытекающих из (5) после перехода от бесконечных рядов к усеченным, приведен в [1]. Поэтому остановимся лишь на определении выражений для N_ρ^0 и $T_{\rho\theta}^0$ применительно к рассматриваемым задачам.

Усилия в поперечных сечениях оболочки без отверстия находятся с использованием балочной теории. Для задачи I имеем

$$N_\xi^0 = \frac{M}{\pi R^2} \sin \varphi. \quad (7)$$

Используя очевидную из фиг. 1 зависимость

$$R\varphi = R_0 \rho \sin \theta$$

и полагая оболочку в окрестности выреза пологой ($\sin \varphi \approx \varphi$), получим

$$N_\xi^0 = \frac{\chi \chi M}{2\pi \omega R^2} \sin \Theta,$$

где

$$\chi = \frac{R_0}{R}.$$

Переход к полярным координатам дает

$$N_\rho^0 = \frac{\chi \chi M}{4\pi \omega R^2} (\sin \theta + \sin 3\theta),$$

$$N_\theta^0 = \frac{\chi \chi M}{4\pi \omega R^2} (3 \sin \theta - \sin 3\theta),$$

$$T_{\rho\theta}^0 = -\frac{\chi \chi M}{4\pi \omega R^2} (\cos \theta - \cos 3\theta). \quad (8)$$

* Схему усилий см. на стр. 4 настоящего сборника (фиг. 1).

Для задачи 2 в поперечном сечении, отстоящем на $R_0\xi$ от начала координат (фиг. 2), имеем

$$N_{\xi}^0 = \frac{PR_0}{\pi R^2} \xi \cos \varphi, \quad T_{\xi\eta}^0 = -\frac{P}{\pi R} \sin \varphi. \quad (9)$$

Положив в силу пологости оболочки $\cos \varphi \approx 1$, а также $\xi = \rho \cos \theta$, после преобразований получим

$$\begin{aligned} N_{\rho}^0 &= \frac{\chi \chi P}{4\pi \omega R} (\cos \theta + 3 \cos 3\theta), \\ N_{\theta}^0 &= \frac{\chi \chi P}{4\pi \omega R} (\cos \theta - \cos 3\theta), \\ T_{\rho\theta}^0 &= \frac{\chi \chi P}{4\pi \omega R} (\sin \theta - 3 \sin 3\theta). \end{aligned} \quad (10)$$

После определения из граничных условий постоянных интегрирования подсчитываются напряжения для дополнительного состояния, которые суммируются затем с соответствующими напряжениями основного состояния.

На фиг. 3 приведена зависимость максимальных напряжений по контуру отверстия от параметра ω для задачи 1, полученная по результатам вычислений на ЭВМ «Урал-2»*. Кривая 1 соответствует напряжениям σ_{θ}^c в срединной поверхности оболочки ($\Theta = 90^\circ$), кривая 2 — изгибным напряжениям σ_{θ}^n на наружной поверхности ($\Theta = 30 \div 35^\circ$ в зависимости от значения ω). Суммарные напряжения σ_{θ} имеют максимум при $\Theta = 90^\circ$ на внутренней поверхности оболочки. Через σ^0 обозначена величина

$$\sigma^0 = \frac{\chi M}{\pi h R^2},$$

равная напряжениям в точке a (фиг. 1) поперечного сечения оболочки без отверстия.

Зависимость максимальных напряжений по контуру отверстия от параметра ω для задачи 2 приведена на фиг. 4. Кривая 1 характеризует напряжения в срединной поверхности σ_{θ}^c ($\theta = 60 \div 70^\circ$), кривая 2 — изгибные напряжения σ_{θ}^n на наружной поверхности ($\theta = 0$), а кривая 3 — суммарные напряжения σ_{θ} , которые имеют максимум на внутренней поверхности оболочки при $\theta = 60 \div 70^\circ$. Здесь

$$\sigma^0 = \frac{\chi P}{\pi R h}$$

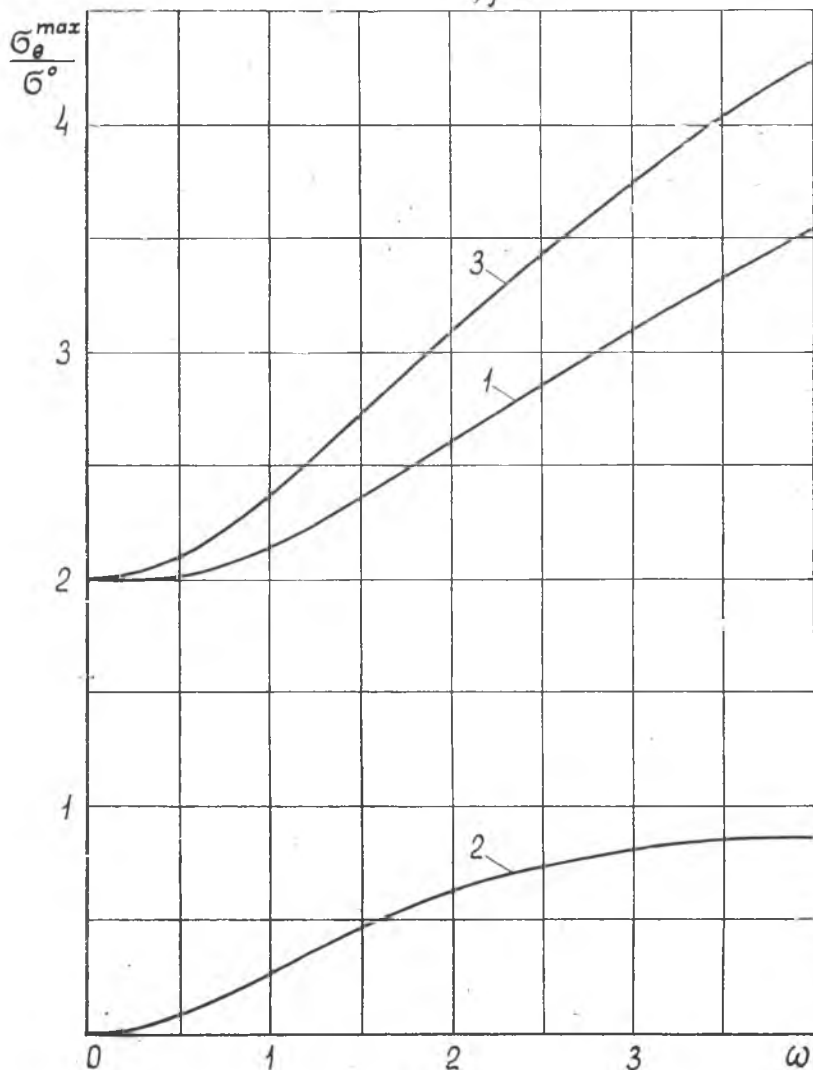
наибольшие напряжения для оболочки без отверстия по контуру $\rho = 1$ (нормальные при $\Theta = 0$ или касательные при $\Theta = 90^\circ$).

Для задачи 2 на фиг. 5 представлено изменение напряжений по мере удаления от контура отверстия при $\omega = 1,5$. Кривые 1 и 2 ха-

* Программирование задач и вычисления на ЭВМ выполнены инженером Г. В. Кановой.

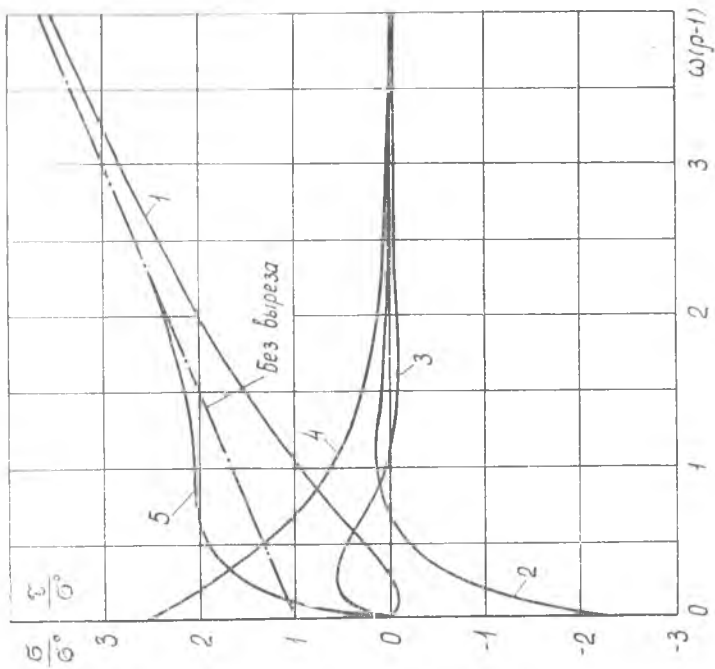
характеризуют соответственно изменение вдоль образующей ($\theta = 0$) напряжений в срединной поверхности σ_ρ^c и σ_θ^c , а кривые 3 и 4 — изменение изгибных напряжений σ_ρ^H и σ_θ^H на наружной поверхности оболочки. Кривая 5 дает изменение касательных напряжений в срединной поверхности $\tau_{\rho\theta}^c$ вдоль направляющей цилиндра ($\theta = 90^\circ$). Напряжения кручения $\tau_{r\theta}^K$ невелики, вследствие чего они не нанесены на график.

Задача 1, $\rho=1$

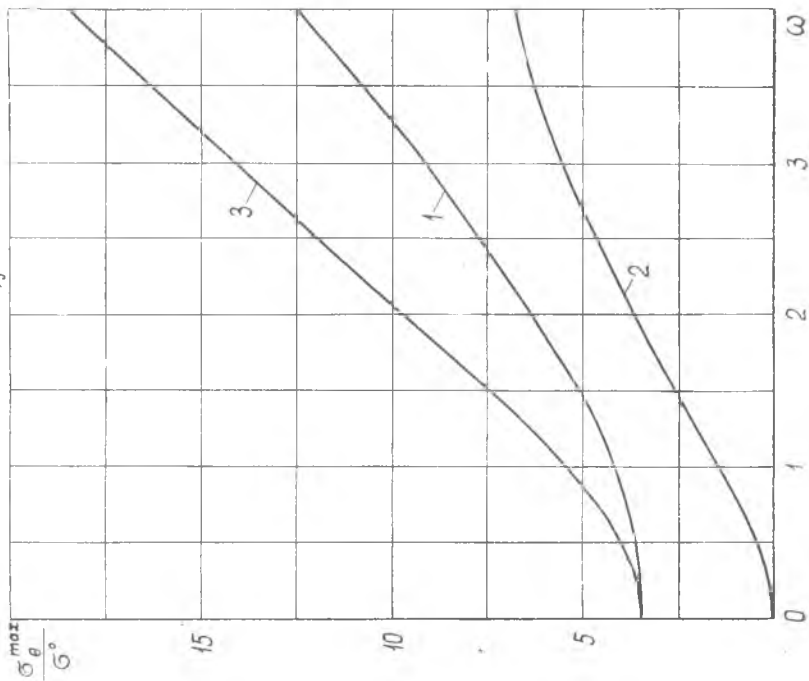


Фиг. 3.

Задача 2, $\omega = 1.5$



Задача 2, $\rho = 1$



Штрихпунктирная линия на фиг. 5 соответствует изменению нормальных и касательных напряжений у оболочки без отверстия. Из графика видно, что кривая I (σ_r) приближается к штрихпунктирной линии относительно медленно*. В остальном же возмущение напряженного состояния, обусловленное отверстием, затухает по мере удаления от его края весьма быстро.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. С. Хазанов. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
2. Х. С. Хазанов. Напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, нагруженной моментом через абсолютно жесткую круглую шайбу. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.

* Аналогичное явление имеет место и при растяжении полосы, ослабленной отверстием.