КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

И. С. АХМЕДЬЯНОВ

МАЛЫЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

R — радиус срединной поверхности сферической оболочки;
δ — толщина оболочки;
ψ — угол между нормалью к срединной поверхности и осью оболочки;
ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — деформации срединной поверхности оболочки;
q_t, q_n — проекции поверхностной нагрузки, отнесенной к единице площади срединной поверхности оболочки, на касательную и нормаль к меридиану оболочки;
N_1 N_2 — нормальные усилия;
M_1, M_2 — изгибающие моменты;
E — модуль упругости материала оболочки;

$$l = \frac{d^2}{d\psi^2} + \operatorname{ctg}\psi \frac{d}{d\psi} + 1, \quad m = \frac{R}{\delta}, \quad \nu = 12m^2.$$

* * *

В работе получена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих малые упруго-пластические деформации сферической оболочки при осесимметричном нагружении. Эта система уравнений решается методом упругих решений А. А. Ильюшина [1]. Выведены формулы для вычисления усилий, моментов и перемещений, возникающих в сферической оболочке при осесимметричном изгибе за пределом упругости. В заключение приведены результаты численного расчета упруго-пластических деформаций сферической оболочки, нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением.

1. Используя основные соотношения, полученные А. А. Ильюшиным [1] для исследования пластических деформаций тонких оболочек, можно вывести следующие формулы, определяющие нормальные усилия N_1, N_2 и изгибающие моменты M_1, M_2 в сферической оболочке при осесимметричном изгибе за пределом упругости:

$$N_1 = \frac{1}{3} E\delta (3\varepsilon + \zeta - 4m\alpha), \tag{1}$$

$$N_2 = \frac{1}{3} E\delta (3\varepsilon - \zeta - 4m\beta), \tag{2}$$

$$M_1 = \frac{E\delta^2}{36m} (3\varkappa + \tau - 48m^3 \eta), \tag{3}$$

$$M_2 = \frac{E\delta^2}{36m} (3\varkappa - \tau - 48m^3 \Theta). \tag{4}$$

В этих выражениях:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \qquad \zeta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{5}$$

$$\varkappa = R(\varkappa_1 + \varkappa_2), \qquad \tau = R(\varkappa_1 - \varkappa_2), \tag{6}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{\mu_0}{8m}(3\varepsilon \pm \zeta) + \frac{\mu_1}{16m^2}(3\varkappa \pm \tau), \tag{7}$$

$$\left.\begin{matrix}\eta \\ \Theta\end{matrix}\right\} = \frac{\mu_1}{16m^2}(3\varepsilon \pm \zeta) + \frac{\mu_2}{32m^3}(3\varkappa \pm \tau), \tag{8}$$

$$\mu_n = \int_{-1}^{1} \omega t^n \, dt, \quad t = \frac{2z}{\delta}, \quad \omega = 1 - \frac{\sigma_i}{E\,\varepsilon_i}, \tag{9}$$

z — расстояние произвольной точки оболочки от ее срединной поверхности, измеряемое вдоль внешней нормали,

σ_i — интенсивность напряжений,

ε_i — интенсивность деформаций,

$$\varepsilon_i = \sqrt{\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2}, \tag{10}$$

$$\gamma_0 = \varepsilon^2 + \frac{1}{3}\zeta^2, \quad \gamma_1 = \frac{1}{m}\left(\varepsilon\varkappa + \frac{1}{3}\zeta\tau\right), \quad \gamma_2 = \frac{1}{4m^2}\left(\varkappa^2 + \frac{1}{3}\tau^2\right). \tag{11}$$

Подставляя выражения (1)—(4) в уравнения равновесия сферической оболочки [2] и принимая во внимание условия неразрывности деформаций срединной поверхности [3, 8], придем к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно ε, ζ, $\varkappa$ и τ:

$$l(\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon = -\frac{1}{2}\varkappa + X_p + X_q, \tag{12}$$

$$l(\varkappa) - \frac{1}{2}\varkappa = \frac{3}{2}\nu\varepsilon + Y_p + Y_q, \tag{13}$$

$$\zeta' + 2\zeta \operatorname{ctg}\psi = \frac{4}{1+\nu}(\varepsilon' - \varkappa') - 3\varepsilon' + Z_p + Z_q, \tag{14}$$

$$\tau' + 2\tau \operatorname{ctg}\psi = -\frac{4\nu}{1+\nu}(\varepsilon' - \varkappa') - 3\varkappa' + Z_p + Z_q. \tag{15}$$

Здесь:

$$X_p = m\,[\alpha'' + (2\alpha' - \beta')\operatorname{ctg}\psi + 2\beta], \tag{16}$$

$$Y_p = m\nu\,[\eta'' + (2\eta' - \Theta')\operatorname{ctg}\psi + 2\Theta] - m\nu(\alpha + \beta + \eta + \Theta), \tag{17}$$

$$Z_p = \frac{4m\nu}{1+\nu}[\alpha' + \eta' + (\alpha - \beta + \eta - \Theta)\operatorname{ctg}\psi], \tag{18}$$

$$X_q = -\frac{3m}{4E}(q_t' + q_t \operatorname{ctg}\psi - q_n), \tag{19}$$

$$Y_q = -\frac{3m\nu}{4E} q_n, \quad Z_q = -\frac{3m\nu}{(1+\nu)E} q_t. \tag{20}$$

Штрих означает производную по агрументу ψ.

2. Интегрирование нелинейных уравнений (12)—(15) будем вести методом последовательных приближений (методом упругих решений А. А. Ильюшина [1]). В качестве исходного (нулевого) приближения принимаем решение системы, которая получается из (12)—(15) при $X_p = Y_p = Z_p = 0$ или, что одно и то же,

$$\alpha = \beta = \eta = \Theta = 0. \tag{21}$$

Равенства (21) имеют место при $\omega = 0$. Отсюда следует, что решение нулевого приближения будет соответствовать некоторому упругому напряженному состоянию сферической оболочки при условии несжимаемости материала (коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}5$). Обозначая через $\varepsilon^{(0)}$, $\zeta^{(0)}$, $\varkappa^{(0)}$, $\tau^{(0)}$ решение уравнений (12)—(15) при $\omega = 0$, будем иметь [8]:

$$\varepsilon^{(0)} = \gamma\,[C_1^{(0)} p_1 + D_1^{(0)} q_1 + C_2^{(0)} p_2 + D_2^{(0)} q_2] + \varepsilon_q, \tag{22}$$

$$\varkappa^{(0)} = -[A_1^{(0)} p_1 + B_1^{(0)} q_1 + A_2^{(0)} p_2 + B_2^{(0)} q_2] + \varkappa_q, \tag{23}$$

$$\zeta^{(0)} = \frac{2\,kC_0^{(0)}}{\sin^2\psi} - 3\gamma\,[C_1^{(0)} r_1 + D_1^{(0)} s_1 + C_2^{(0)} r_2 + D_2^{(0)} s_2] + \zeta_q, \tag{24}$$

$$\tau^{(0)} = -[A_1^{(0)} r_1 + B_1^{(0)} s_1 + A_2^{(0)} r_2 + B_2^{(0)} s_2] + \tau_q. \tag{25}$$

Здесь:

ε_q, $\varkappa_q$, ζ_q и τ_q — частное решение рассматриваемой системы, определяемое поверхностной нагрузкой q_t и q_n,

$C_0^{(0)}, C_1^{(0)}, D_1^{(0)}, C_2^{(0)}$ и $D_2^{(0)}$ — произвольные постоянные,

$$A_1^{(0)} = \gamma\,[C_1^{(0)} - 2\lambda D_1^{(0)}], \quad B_1^{(0)} = \gamma\,[D_1^{(0)} + 2\lambda C_1^{(0)}], \tag{26}$$

$$\gamma = \frac{1}{18m^2}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{36m^2 - 1}, \quad k = \frac{3}{4\pi E\,\delta\,R},$$

$$p_1(\psi) = \varphi_1 - \lambda\omega_1, \quad q_1(\psi) = \omega_1 + \lambda\varphi_1, \tag{27}$$

$$r_1(\psi) = g_1 + p_1, \qquad s_1(\psi) = h_1 + q_1, \tag{28}$$

$$g_1(\psi) = 2\varphi_1' \operatorname{ctg}\psi, \quad h_1(\psi) = 2\omega_1' \operatorname{ctg}\psi. \tag{29}$$

Значения постоянных $A_2^{(0)}$, $B_2^{(0)}$ и функций p_2, q_2, r_2, s_2, g_2 и h_2 вычисляются по формулам, которые получаются из выражений (26)—(29) изменением индекса 1 на 2.

Функции φ_1, ω_1, φ_2 и ω_2 определяются из соотношений

$$\varphi_1 + i\omega_1 = \sigma_1, \qquad \varphi_2 + i\omega_2 = \sigma_2, \tag{30}$$

где σ_1 и σ_2 — линейно независимые частные решения дифференциального уравнения

$$x(1-x)\frac{d^2\sigma}{dx^2} + (1-2x)\frac{d\sigma}{dx} + (1+i\lambda)\sigma = 0,$$

представленные в виде степенных рядов [4, 6, 7]:

$$\sigma_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \qquad \sigma_2 = F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x), \tag{31}$$

причем

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5+4\lambda i}}{2}, \quad \beta = 1-\alpha, \quad \gamma = 1, \quad x = \sin^2\frac{\psi}{2}.$$

Располагая решением (22)—(25) нулевого приближения, можно найти решение системы (12)—(15) в следующем, первом приближении. Для этого, воспользовавшись формулами (11), (10), (9), (7) и (8) вычисляем, исходя из решения (22)—(25), значения функций $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $\eta^{(0)}$ и $\Theta^{(0)}$ нулевого приближения, которые дают возможность определить функции $X_p^{(0)}$, $Y_p^{(0)}$ и $Z_p^{(0)}$ нулевого приближения и далее записать уравнения, определяющие решение исходной системы (12)—(15) в первом приближении. Это решение, которое мы обозначим через $\varepsilon^{(1)}$, $\zeta^{(1)}$, $\varkappa^{(1)}$ и $\tau^{(1)}$, служит основой для получения решения уравнений (12)—(15) во втором приближении и т. д.

Для приближения, номер которого $n\,(n = 1, 2, \ldots)$, будем иметь

$$\varepsilon^{(n)} = \gamma\,[C_1^{(n)}p_1 + D_1^{(n)}q_1 + C_2^{(n)}p_2 + D_2^{(n)}q_2] + \varepsilon_p^{(n)} + \varepsilon_q, \tag{32}$$

$$\varkappa^{(n)} = -[A_1^{(n)}p_1 + B_1^{(n)}q_1 + A_2^{(n)}p_2 + B_2^{(n)}q_2] + \varkappa_p^{(n)} + \varkappa_q, \tag{33}$$

$$\zeta^{(n)} = \frac{2kC_0^{(n)}}{\sin^2\psi} - 3\gamma\,[C_1^{(n)}r_1 + D_1^{(n)}s_1 + C_2^{(n)}r_2 + D_2^{(n)}s_2] + \zeta_p^{(n)} + \zeta_q, \tag{34}$$

$$\tau^{(n)} = -[A_1^{(n)}r_1 + B_1^{(n)}s_1 + A_2^{(n)}r_2 + B_2^{(n)}s_2] + \tau_p^{(n)} + \tau_q. \tag{35}$$

Здесь $\varepsilon_p^{(n)}$, $\varkappa_p^{(n)}$, $\zeta_p^{(n)}$ и $\tau_p^{(n)}$ — частное решение системы уравнений:

$$l\,[\varepsilon_p^{(n)}] + \frac{1}{2}\varepsilon_p^{(n)} = -\frac{1}{2}\varkappa_p^{(n)} + X_p^{(n-1)}, \tag{36}$$

$$l\,[\varkappa_p^{(n)}] - \frac{1}{2}\varkappa_p^{(n)} = \frac{3}{2}\nu\varepsilon_p^{(n)} + Y_p^{(n-1)}, \tag{37}$$

$$\zeta_p^{(n)\prime} + 2\zeta_p^{(n)}\operatorname{ctg}\psi = \frac{4}{1+\nu}[\varepsilon_p^{(n)\prime} - \varkappa_p^{(n)\prime}] - 3\varepsilon_p^{(n)\prime} + Z_p^{(n-1)}, \tag{38}$$

$$\tau_p^{(n)\prime} + 2\tau_p^{(n)}\operatorname{ctg}\psi = -\frac{4\nu}{1+\nu}[\varepsilon_p^{(n)\prime} - \varkappa_p^{(n)\prime}] - 3\varkappa_p^{(n)\prime} + Z_p^{(n-1)}. \tag{39}$$

Решение этих уравнений целесообразно искать, преобразовав их в систему интегральных уравнений. Это преобразование дает возможность найти искомое частное решение, не содержащее производных от функций $\alpha^{(n-1)}$, $\beta^{(n-1)}$, $\eta^{(n-1)}$ и $\Theta^{(n-1)}$, получаемых не в аналитическом виде, а в виде некоторой совокупности числовых значений.

Для получения интегральных уравнений перепишем уравнения (36)—(39) в виде:

$$[\varepsilon_p^{(n)\prime}\sin\psi]' = \left[-\frac{3}{2}\varepsilon_p^{(n)} - \frac{1}{2}\varkappa_p^{(n)} + X_p^{(n-1)}\right]\sin\psi,$$

$$[\varkappa_p^{(n)\prime}\sin\psi]' = \left[-\frac{1}{2}\varkappa_p^{(n)} + \frac{3}{2}\nu\varepsilon_p^{(n)} + Y_p^{(n-1)}\right]\sin\psi,$$

$$[\zeta_p^{(n)}\sin^2\psi]' = \left\{\frac{4}{1+\nu}[\varepsilon_p^{(n)\prime} - \varkappa_p^{(n)\prime}] - 3\varepsilon_p^{(n)\prime} + Z_p^{(n-1)}\right\}\sin^2\psi,$$

$$[\tau_p^{(n)}\sin^2\psi]' = \left\{-\frac{4\nu}{1+\nu}[\varepsilon_p^{(n)\prime} - \varkappa_p^{(n)\prime}] - 3\varkappa_p^{(n)\prime} + Z_p^{(n-1)}\right\}\sin^2\psi,$$

и затем проинтегрируем их (воспользовавшись методом интегрирования по частям). Заменяя, далее, в первых двух полученных уравнениях неизвестные функции $\varepsilon_p^{(n)}$ и $\varkappa_p^{(n)}$, стоящие под знаками интегралов, на известные $\varepsilon_p^{(n-1)}$ и $\varkappa_p^{(n-1)}$, придем к следующим приближенным выражениям для $\varepsilon_p^{(n)}$, $\varkappa_p^{(n)}$, $\zeta_p^{(n)}$ и $\tau_p^{(n)}$:

$$\varepsilon_p^{(n)} = m\alpha^{(n-1)} + \frac{1}{\sin\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}\left[F_1^{(n-1)}\cos\psi - \int_{\psi_0}^{\psi}G_1^{(n-1)}\sin\psi d\psi\right]d\psi, \quad (40)$$

$$\varkappa_p^{(n)} = m\nu\eta^{(n-1)} + \frac{1}{\sin\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}\left[F_2^{(n-1)}\cos\psi - \int_{\psi_0}^{\psi}G_2^{(n-1)}\sin\psi d\psi\right]d\psi, \quad (41)$$

$$\zeta_p^{(n)} = \frac{4m\nu}{1+\nu}[\alpha^{(n-1)} + \eta^{(n-1)}] - \frac{3\nu-1}{1+\nu}\varepsilon_p^{(n-1)} -$$

$$-\frac{4}{1+\nu}\varkappa_p^{(n)} - \frac{1}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}H_1^{(n-1)}\sin\psi\cos\psi\,d\psi, \quad (42)$$

$$\tau_p^{(n)} = \frac{4m\nu}{1+\nu}[\alpha^{(n-1)} + \eta^{(n-1)}] + \frac{\nu-3}{1+\nu}\varkappa_p^{(n)} -$$

$$-\frac{4\nu}{1+\nu}\varepsilon_p^{(n)} - \frac{1}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}H_2^{(n-1)}\sin\psi\cos\psi\,d\psi. \quad (43)$$

Здесь:

$$F_1^{(n-1)} = \varepsilon_p^{(n-1)} - m\beta^{(n-1)}, \quad (44)$$

$$G_1^{(n-1)} = \frac{3}{2}\varepsilon_p^{(n-1)} + \frac{1}{2}\varkappa_p^{(n-1)} - m[\alpha^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}]. \quad (45)$$

$$F_2^{(n-1)} = \varkappa_p^{(n-1)} - m\nu\Theta^{(n-1)}, \quad (46)$$

$$G_2^{(n-1)} = \frac{1}{2}\varkappa_p^{(n-1)} - \frac{3}{2}\nu\varepsilon_p^{(n-1)} + m\nu\left[\alpha^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}\right], \tag{47}$$

$$H_1^{(n-1)} = \frac{4m\nu}{1+\nu}\left[\alpha^{(n-1)} + \beta^{(n-1)} + \eta^{(n-1)} + \Theta^{(n-1)}\right] - $$

$$- \frac{6\nu - 2}{1+\nu}\varepsilon_p^{(n)} - \frac{8}{1+\nu}\varkappa_p^{(n)}, \tag{48}$$

$$H_2^{(n-1)} = \frac{4m\nu}{1+\nu}\left[\alpha^{(n-1)} + \beta^{(n-1)} + \eta^{(n-1)} + \Theta^{(n-1)}\right] + $$

$$+ \frac{2\nu - 6}{1+\nu}\varkappa_p^{(n)} - \frac{8\nu}{1+\nu}\varepsilon_p^{(n)}, \tag{49}$$

ψ_0 — начальное значение угла ψ.

Расчет величин $\varepsilon^{(n)}$, $\varkappa^{(n)}$, $\zeta^{(n)}$ и $\tau^{(n)}$ по формулам (32)—(35) заканчивается, как только разница между двумя следующими друг за другом приближениями станет достаточно малой.

Постоянные интегрирования $C_0^{(n)}$, $C_1^{(n)}$, $D_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$ и $D_2^{(n)}$ для каждого приближения определяются отдельно (в соответствии с граничными условиями).

После того, как по приведенной схеме будет получено решение уравнений (12)—(15), можно найти распределение напряжений в точках наружной $\left(z = \frac{\delta}{2}\right)$ и внутренней $\left(z = -\frac{\delta}{2}\right)$ поверхностей оболочки, воспользовавшись формулами

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1\left(\frac{\delta}{2}\right)\\ \sigma_2\left(\frac{\delta}{2}\right)\end{array}\right\} = \frac{1}{3}E\left[1 - \omega\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]\left[3\varepsilon \pm \zeta + \frac{1}{2m}(3\varkappa \pm \tau)\right], \tag{50}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1\left(-\frac{\delta}{2}\right)\\ \sigma_2\left(-\frac{\delta}{2}\right)\end{array}\right\} = \frac{1}{3}E\left[1 - \omega\left(-\frac{\delta}{2}\right)\right]\left[3\varepsilon \pm \zeta - \frac{1}{2m}(3\varkappa \pm \tau)\right]. \tag{51}$$

Для перемещений u и w точек срединной поверхности оболочки в соответствии с формулами [2]

$$u = C\sin\psi + R\sin\psi\int\limits_{\psi_0}^{\psi}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sin\psi}d\psi, \quad w = R\varepsilon_2 - u\operatorname{ctg}\psi$$

будем иметь следующие выражения

$$u^{(n)} = C^{(n)}\sin\psi + kRC_0^{(n)}\left(\sin\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg}\psi\right) + $$

$$+ \frac{3}{2}\gamma R\left[C_1^{(n)}g_1 + D_1^{(n)}h_1 + C_2^{(n)}g_2 + D_2^{(n)}h_2\right]\operatorname{tg}\psi + u_p^{(n)} + u_q, \tag{52}$$

$$w^{(n)} = -C^{(n)}\cos\psi - kRC_0^{(n)}\left(1 + \cos\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) + $$

$$+ 2\gamma R\left[C_1^{(n)}p_1 + D_1^{(n)}q_1 + C_2^{(n)}p_2 + D_2^{(n)}q_2\right] + w_p^{(n)} + w_q, \tag{53}$$

в которых

$$u_p^{(n)} = R\sin\psi\int\limits_{\psi_0}^{\psi}\frac{\zeta_p^{(n)}}{\sin\psi}d\psi,\quad w_p^{(n)} = R\varepsilon_{2p}^{(n)} - u_p^{(n)}\operatorname{ctg}\psi, \tag{54}$$

$$u_q = R\sin\psi\int\limits_{\psi_0}^{\psi}\frac{\zeta_q}{\sin\psi}d\psi,\quad w_q = R\varepsilon_{2q} - u_q\operatorname{ctg}\psi, \tag{55}$$

$$\varepsilon_{2p}^{(n)} = \frac{\varepsilon_p^{(n)} - \zeta_p^{(n)}}{2};\quad \varepsilon_{2q} = \frac{\varepsilon_q - \zeta_q}{2}. \tag{56}$$

$C^{(n)}$ — произвольная постоянная.

Угол поворота ϑ нормали к срединной поверхности оболочки найдем, исходя из зависимости

$$\vartheta = R\varkappa_2\operatorname{tg}\psi$$

и формул (6), (33) и (35):

$$\vartheta^{(n)} = \frac{1}{2}\left[A_1^{(n)}g_1 + B_1^{(n)}h_1 + A_2^{(n)}g_2 + B_2^{(n)}h_2\right]\operatorname{tg}\psi + \vartheta_p^{(n)} + \vartheta_q, \tag{57}$$

$$\vartheta_p^{(n)} = R\varkappa_{2p}^{(n)}\operatorname{tg}\psi = \frac{\varkappa_p^{(n)} - \tau_p^{(n)}}{2}\operatorname{tg}\psi, \tag{58}$$

$$\vartheta_q = \frac{\varkappa_q - \tau_q}{2}\operatorname{tg}\psi. \tag{59}$$

Наконец, для перерезывающей силы Q, получаем:

$$Q^{(n)} = \left[N_1^{(n)} - \frac{\Phi(\psi)}{2\pi R\sin^2\psi}\right]\operatorname{tg}\psi, \tag{60}$$

$\Phi(\psi)$ — равнодействующая всех сил, приложенных к части оболочки, ограниченной параллелями, соответствующими углам ψ_0 и ψ.

3. В случае упругих деформаций вместо системы уравнений (12)—(15) будем иметь следующую систему:

$$l(\varepsilon) + \mu\varepsilon = -(1-\mu)\varkappa + X_q, \tag{61}$$

$$l(\varkappa) - \mu\varkappa = \nu(1+\mu)\varepsilon + Y_q, \tag{62}$$

$$\zeta' + 2\zeta\operatorname{ctg}\psi = \frac{2}{(1-\mu)(1+\nu)}(\varepsilon' - \varkappa') - \frac{1+\mu}{1-\mu}\varepsilon' + Z_q, \tag{63}$$

$$\tau' + 2\tau\operatorname{ctg}\psi = -\frac{2\nu}{(1-\mu)(1+\nu)}(\varepsilon' - \varkappa') - \frac{1+\mu}{1-\mu}\varkappa' + Z_q. \tag{64}$$

Здесь

$$X_q = -\frac{m(1-\mu^2)}{E}(q_t' + q_t\operatorname{ctg}\psi - q_n), \tag{65}$$

$$Y_q = -\frac{m\nu(1-\mu^2)}{E}q_n,\quad Z_q = -\frac{2m\nu(1+\mu)}{(1+\nu)E}q_t, \tag{66}$$

μ — коэффициент Пуассона.

Решение уравнений (61)—(64):

$$\varepsilon = 2\gamma(1-\mu)(C_1p_1 + D_1q_1 + C_2p_2 + D_2q_2) + \varepsilon_q, \tag{67}$$

$$\varkappa = -(A_1p_1 + B_1q_1 + A_2p_2 + B_2q_2) + \varkappa_q, \tag{68}$$

$$\zeta = \frac{2kC_0}{\sin^2\psi} - 2\gamma(1+\mu)(C_1r_1 + D_1s_1 + C_2r_2 + D_2s_2) + \zeta_q, \tag{69}$$

$$\tau = -(A_1r_1 + B_1s_1 + A_2r_2 + B_2s_2) + \tau_q, \tag{70}$$

причем

$$\gamma = \frac{1}{24m^2(1-\mu^2)} = \frac{D}{2E\delta R^2}, \quad D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \quad k = \frac{1+\mu}{2\pi E\delta R},$$

$$A_1 = 2\gamma(\mu C_1 - \lambda D_1), \quad B_1 = 2\gamma(\mu D_1 + \lambda C_1). \tag{71}$$

C_0, C_1, D_1, C_2 и D_2 — произвольные постоянные.

Формулы для усилий, моментов и перемещений:

$$N_1 = \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}[(1+\mu)\varepsilon + (1-\mu)\zeta],$$

$$N_2 = \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}[(1+\mu)\varepsilon - (1-\mu)\zeta], \tag{72}$$

$$M_1 = \frac{D}{2R}[(1+\mu)\varkappa + (1-\mu)\tau],$$

$$M_2 = \frac{D}{2R}[(1+\mu)\varkappa - (1-\mu)\tau], \tag{73}$$

$$u = C\sin\psi + kRC_0\left(\sin\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg}\psi\right) +$$

$$+ \gamma(1+\mu)R(C_1g_1 + D_1h_1 + C_2g_2 + D_2h_2)\operatorname{tg}\psi + u_q, \tag{74}$$

$$w = -C\cos\psi - kRC_0\left(1 + \cos\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) +$$

$$+ 2\gamma R(C_1p_1 + D_1q_1 + C_2p_2 + D_2q_2) + w_q, \tag{75}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}(A_1g_1 + B_1h_1 + A_2g_2 + B_2h_2)\operatorname{tg}\psi + \vartheta_q. \tag{76}$$

При действии равномерно распределенного давления ($q_t = 0$, $q_n = q$):

$$\varepsilon_q = \frac{m(1-\mu)}{E}q, \quad \zeta_q = 0, \quad \varkappa_q = \tau_q = 0, \quad \vartheta_q = 0. \tag{77}$$

4. При сложном напряжении состоянии тела зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i в каждой его точке принимается такой же, как зависимость между напряжением σ и удлинением ε при простом растяжении [1, 5]. Эта зависимость для большинства материалов при малых относительных деформациях ($\varepsilon < 0{,}02$) может быть схематически представлена в виде двух отрезков прямых, соединенных между собой некоторой плавной кривой [5] (фиг. 1). Тогда при $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_e$ будем иметь:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i. \tag{78}$$

Если же $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon_0$, то, как следует из фиг. 1,

$$\sigma_i = \sigma_0 + E'(\varepsilon_i - \varepsilon_0). \tag{79}$$

Для значений ε_i, удовлетворяющих условию $\varepsilon_e \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_0$, зависимость между σ_i и ε_i можно принять в виде:

$$\sigma_i = \sigma_0 + E'(\varepsilon_i - \varepsilon_0) - A(\varepsilon_0 - \varepsilon_i)^n. \tag{80}$$

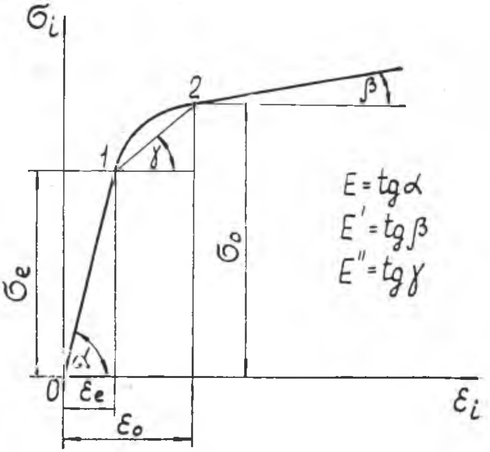
Здесь A и n — постоянные величины.

Определим их из условий:

$$\sigma_i = \sigma_e, \quad \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = E$$

при $\varepsilon_i = \varepsilon_e$. В результате будем иметь:

$$n = \frac{E - E'}{E'' - E'},$$



Фиг. 1.

$$A = \frac{\sigma_0 - \sigma_e - E'(\varepsilon_0 - \varepsilon_e)}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_e)^n} = \frac{E'' - E'}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_e)^{n-1}}. \tag{81}$$

Имея в виду, что

$$\omega = 1 - \frac{\sigma_i}{E\varepsilon_i},$$

находим:

$$\omega = 0$$

при $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_e$;

$$\omega = a - \frac{b}{\varepsilon_i} + \frac{c}{\varepsilon_i}(\varepsilon_0 - \varepsilon_i)^n, \tag{82}$$

при $\varepsilon_e \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_0$;

$$\omega = a - \frac{b}{\varepsilon_i}, \tag{83}$$

при $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon_0$, причем,

$$a = 1 - \frac{E'}{E}, \quad b = \frac{\sigma_0 - E'\varepsilon_0}{E}, \quad c = \frac{E'' - E'}{E(\varepsilon_0 - \varepsilon_e)^{n-1}}. \tag{84}$$

Пусть для некоторого материала известно, что

$$\sigma_e = 1{,}3 \cdot 10^3 \text{ дан/см}^2, \quad \varepsilon_e = 2 \cdot 10^{-3}, \ E = 6{,}5 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2,$$

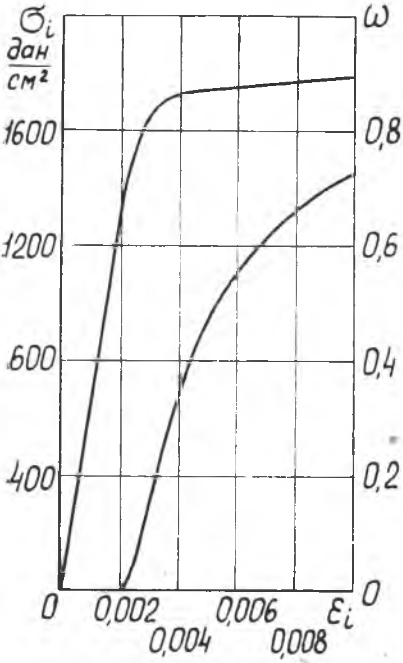
$$\sigma_0 = 1{,}75 \cdot 10^3 \text{ дан/см}^2, \ \varepsilon_0 = 6 \cdot 10^{-3}, \ E' = 1 \cdot 10^4 \text{ дан/см}^2.$$

Пользуясь приведенными выше формулами, находим:

$$E'' = 1{,}125 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2, \quad n = 6{,}2439, \quad A = 3{,}8485 \cdot 10^{17},$$

$$a = 9{,}8462 \cdot 10^{-1}, \quad b = 2{,}6 \cdot 10^{-3}, \quad c = 5{,}9207 \cdot 10^{11}.$$

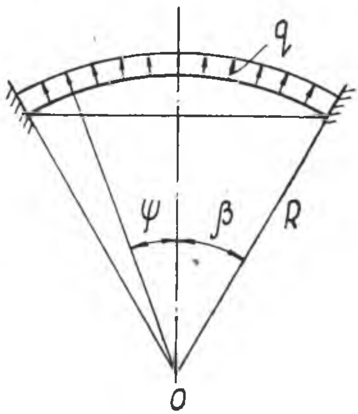
Далее по формулам (82)—(83) вычисляем значения ω в зависимости от ε_i. Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Здесь же приведена соответствующая зависимость



Фиг. 2.

$$\sigma_i = f(\varepsilon i).$$

5. Рассмотрим теперь пример расчета малых упругопластических деформаций сферического днища, жестко защемленного по краю $\psi = \beta_0$ и нагруженного внутренним равномерно распределенным давлением q (фиг. 3).



Фиг. 3.

Так как рассматриваемая оболочка замкнута в вершине, то из условия конечности усилий, моментов и перемещений в оболочке следует, что

$$C_0^{(n)} = 0, \; C_2^{(n)} = D_2^{(n)} = 0.$$

Тогда в соответствии с формулами (77), выражения (32)—(35) будут иметь вид:

$$\varepsilon^{(n)} = \gamma\,[C_1^{(n)} p_1 + D_1^{(n)} q_1] + \varepsilon_p^{(n)} + \frac{m}{2E}\,q, \tag{85}$$

$$\varkappa^{(n)} = -\,[A_1^{(n)} p_1 + B_1^{(n)} q_1] + \varkappa_p^{(n)}, \tag{86}$$

$$\zeta^{(n)} = -\,3\gamma\,[C_1^{(n)} r_1 + D_1^{(n)} s_1] + \zeta_p^{(n)}, \tag{87}$$

$$\tau^{(n)} = -\,[A_1^{(n)} r_1 + B_1^{(n)} s_1] + \tau_p^{(n)}. \tag{88}$$

Для определения произвольных постоянных $C_1^{(n)}$ и $D_1^{(n)}$ имеем следующие условия:

при $\psi = \beta_0$: 1) $\varepsilon_2^{(n)} = 0$, 2) $\varkappa^{(n)} = 0$, или в развернутом виде:

$$C_1^{(n)} [3g_1(\beta_0) + 4p_1(\beta_0)] + D_1^{(n)} [3h_1(\beta_0) + 4q_1(\beta_0)] =$$
$$= -\frac{1}{\gamma} [\varepsilon_p^{(n)}(\beta_0) - \zeta_p^{(n)}(\beta_0)] - \frac{m}{2\gamma}\frac{q}{E}, \quad (89)$$
$$C_1^{(n)} [g_1(\beta_0) + 2\lambda h_1(\beta_0)] + D_1^{(n)} [h_1(\beta_0) - 2\lambda g_1(\beta_0)] =$$
$$= -\frac{1}{\gamma} [\varkappa_p^{(n)}(\beta_0) - \tau_p^{(n)}(\beta_0)]. \quad (90)$$

Напомним, что в исходном (нулевом) приближении

$$\varepsilon_p^{(0)} = \zeta_p^{(0)} = 0, \quad \varkappa_p^{(0)} = \tau_p^{(0)} = 0.$$

Приведем результаты численного расчета оболочки, для которой

$$\lambda = 1000, \quad \beta_0 = 30^\circ, \quad q = 7{,}2 \ \text{дан/см}^2.$$

Значению $\lambda = 1000$ при $\mu = 0{,}5$ соответствует отношение $m = \frac{R}{\delta} = 333{,}33$.

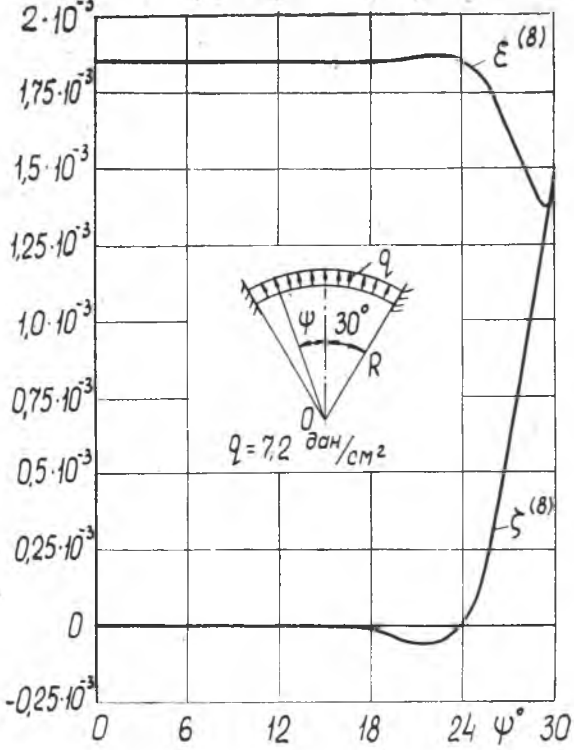
При проведении расчетов предполагалось, что оболочка изготовлена из материала, для которого зависимость $\omega = f(\varepsilon_i)$ имеет вид, показанный на фиг. 2.

Вычисления деформаций и напряжений, выполненные по приведенным выше формулам, дали следующие результаты *. Распределение величин ε, ζ, χ и τ для последнего (восьмого) приближения имеет вид, представленный на фиг. 4 и 5. Соответствующее распределение безразмерных отношений напряжений в точках наружной $\left(z = \frac{\delta}{2}\right)$ и внутренней $\left(z = -\frac{\delta}{2}\right)$ поверхностей оболочки к величине действующего давления $q = 7{,}2$ *дан/см*^{2} показано на фиг. 6. Кроме того, на этой фигуре пунктиром показаны отношения напряжений к давлению в предположении, что деформации и напряжения в оболочке продолжают оставаться упругими и при давлении $q = 7{,}2$ *дан/см*^{2} (коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}5$). О степени сходимости примененного здесь метода упругих решений (метода последовательных приближений) можно судить по значениям ε, $\varkappa$ и отношений напряжений $\sigma_1\left(-\frac{\delta}{2}\right)$ и $\sigma_1\left(\frac{\delta}{2}\right)$ для защемленного края оболочки ($\psi = 30°$) к величине давления $q = 7{,}2$ *дан/см*^{2} в зависимости от номера приближения n, приведенным в таблице 1.

В заключение отметим, что при отсутствии таблиц функций p_1, q_1, g_1, h_1, p_2, q_2, g_2 и h_2 можно воспользоваться их приближенными представлениями, приведенными в [8].

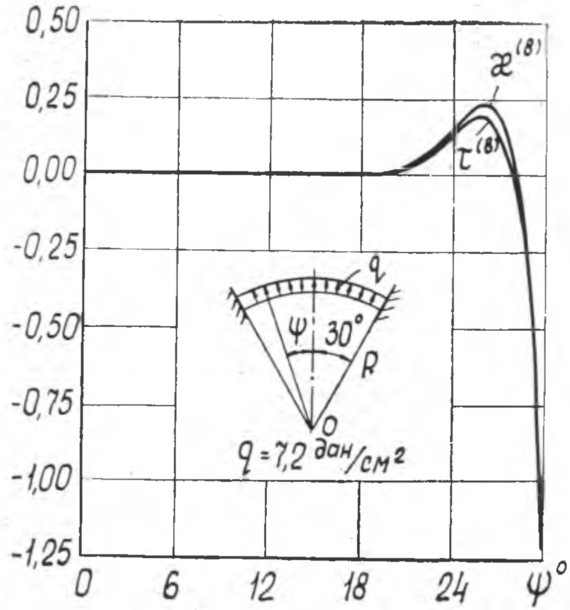
---

* Составление программы и все вычисления на машине «Урал-2» были выполнены инж. Д. Г. Аминовой.



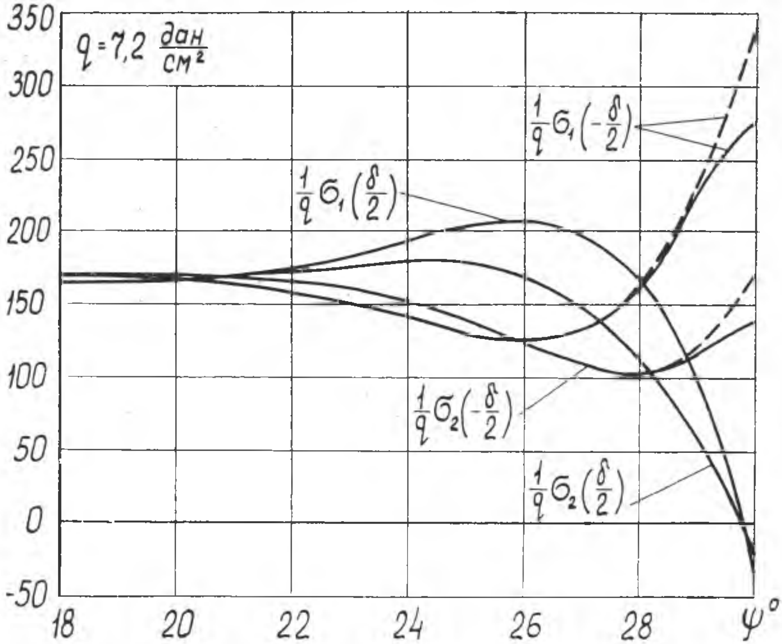
2·10⁻³
1,75·10⁻³
1,5·10⁻³
1,25·10⁻³
1,0·10⁻³
0,75·10⁻³
0,5·10⁻³
0,25·10⁻³
0
-0,25·10⁻³
0
6
12
18
24
ψ°
30
ε(8)
ζ(8)
q
ψ
30°
R
O
q = 7,2 дан/см²

Фиг. 4.



0,50
0,25
0,00
-0,25
-0,50
-0,75
-1,00
-1,25
0
6
12
18
24
ψ°
æ(8)
τ(8)
q
ψ
30°
R
O
q = 7,2 дан/см²

Фиг. 5.



Фиг. 6.

Таблица 1

n	ε	$\varkappa$	$\frac{1}{q}\sigma_1\left(-\frac{\delta}{2}\right)$	$\frac{1}{q}\sigma_1\left(\frac{\delta}{2}\right)$
0	$1,327.10^{-3}$	—1,002	270,2	—21,22
1	$1,405.10^{-3}$	—1,140	274,1	—36,69
2	$1,456.10^{-3}$	—1,170	275,0	—35,99
3	$1,478.10^{-3}$	—1,183	275,3	—35,72
4	$1,488.10^{-3}$	—1,195	275,5	—36,68
5	$1,494.10^{-3}$	—1,203	275,6	—37,33
6	$1,497.10^{-3}$	—1,207	275,7	—37,74
7	$1,500.10^{-3}$	—1,210	275,7	—38,01
8	$1,501.10^{-3}$	—1,212	275,8	—38,19

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин. Пластичность, Гостехиздат, 1948.
2. З. Б. Канторович. Основы расчета химических машин и аппаратов, Машгиз, 1960.

3. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1962.
4. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, 1953.
5. Н. И. Безухов. Теория упругости и пластичности, Гостехиздат, 1953.
6. И. С. Ахмедьянов. Об одном методе интегрирования уравнений изгиба сферической оболочки при осесимметричном нагружении, ИВУЗ, «Авиационная техника», № 3, 1962.
7. И. С. Ахмедьянов, Х. С. Хазанов. Расчет сферических оболочек при осесимметричном нагружении, Куйбышев, 1967.
8. И. С. Ахмедьянов. Температурные напряжения в сферической оболочке при осесимметричном нагреве. Статья помещена в настоящем сборнике.