

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ ЧЕРЕЗ КРУГЛУЮ ПЛОЩАДКУ НОРМАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ СИЛАМИ

Рассматривается напряженное состояние цилиндрической оболочки (радиус срединной поверхности R , толщина h) с упругим включением радиуса R_0 и толщиной $h_1 \geq h$. Включение представляется как элемент цилиндрической оболочки. К нему приложена нормальная поверхностная нагрузка $q_n(\rho, \theta) = q \rho \cos \theta$, где $\rho = \frac{r}{R_0}$, r, θ — полярные на развертке цилиндра координаты*. Предполагается, что момент от внешней нагрузки уравнивается соответствующими усилиями на торцах оболочки.

Будем решать задачу сопряжения нагруженной круговой области ($\rho \leq 1$) с внешней областью оболочки, лишенной поверхностных сил. Полагаем, что оболочка и включение имеют общую срединную поверхность.

Для исследования напряженного состояния системы используется дифференциальное уравнение пологой цилиндрической оболочки относительно комплексной функции $F = \omega + i\varphi$ [1]. Как показано в [2], решение однородного дифференциального уравнения оболочки для напряженного состояния, симметричного относительно образующей цилиндра и обратно симметричного относительно направляющей, имеет вид

$$F_{(\rho, \theta)} = \sum_{\nu=1,3}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{\nu-1} [A_n H_n^{(1)}(z) + C_n I_n(z)] [I_{n-\nu}(z) + I_{n+\nu}(z)] \cos \nu \theta. \quad (1)$$

Здесь $A_n = a_n + ib_n$, $C_n = c_n + id_n$ — комплексные постоянные,

$$z = x \sqrt{2i}, \quad x = \omega \rho, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{R_0}{\sqrt{Rh}}.$$

* Все обозначения в настоящей статье приняты такими же, как и на стр. 3 настоящего сборника.

Усилия, действующие по замкнутому контуру $\rho = \text{const}$, приводятся к моменту M_n , который связан простой зависимостью с постоянными интегрирования [3]

$$M_n = -\frac{\kappa E R_0^2}{8\omega^3 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n). \quad (2)$$

Из условий однозначности перемещений u и v имеет место [3] соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = 0. \quad (3)$$

Для внешней области, удерживая только убывающую при больших значениях $\omega\rho$ часть решения (1), запишем

$$F_{(\rho, \theta)} = \sum_{\nu=1,3}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{\nu-1} A_n H_n^{(1)} [I_{n-\nu}(z) + I_{n+\nu}(z)] \cos \nu\theta. \quad (4)$$

Для упругого включения в решении однородного уравнения удерживается лишь возрастающая часть:*

$$F_{I(\rho, \theta)} = \sum_{\nu=1,3}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{\nu-1} C_n I_n(z_1) [I_{n-\nu}(z_1) + I_{n+\nu}(z_1)] \cos \nu\theta, \quad (5)$$

где

$$z_1 = x_1 \sqrt{2i}, \quad x_1 = \omega_1 \rho, \quad \omega_1 = \omega \sqrt{\frac{h}{h_1}}.$$

К решению однородного уравнения здесь следует добавить частное решение неоднородного уравнения полой оболочки, которое в полярных координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F + 4i\omega^2 \left[\nabla^2 F + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) \cos 2\theta - \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right] = \frac{R_0^4}{D} q_n, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Можно показать, что для рассматриваемого вида нагрузки частное решение уравнения (6) приводится к виду

$$F_1^*(\rho, \theta) = (9x_1 - 4ix_1^3) K \cos \theta, \quad K = \frac{\lambda_1 R}{3E\omega_1} q. \quad (7)$$

Этому решению соответствуют следующие выражения для усилий и перемещений в срединной поверхности упругого включения:

$$N_{1\rho}^* = \frac{KE}{\lambda_1} x_1 \cos \theta, \quad T_{1\theta}^* = \frac{KE}{\lambda_1} x_1 \sin \theta, \quad N_{1\theta}^* = \frac{3KE}{\lambda_1} x_1 \cos \theta,$$

* Здесь и далее дополнительным индексом 1 внизу обозначены параметры, относящиеся к упругому включению.

$$u_1^* = -\frac{\nu K x_1^2}{8\omega_1} [(5 + 12\nu) \cos \theta - 9 \cos 3\theta],$$

$$v_1^* = -\frac{\nu K x_1^2}{8\omega_1} [(25 - 4\nu) \sin \theta + 9 \sin 3\theta].$$

Заметим, что для упругого включения в каждом сечении $\rho = \text{const}$ момент от внешней поверхностной нагрузки уравновешивается усилиями $N_{1\rho}^*$ и $T_{1\rho\theta}^*$.

Граничные условия при $\rho=1$, выражающие условия равенства внутренних усилий и перемещений в оболочке и во включении по линии спая, будут иметь вид

$$M_{1\rho} = M_\rho, \quad Q_{1\rho}^* = Q_\rho^*, \quad N_{1\rho} + N_{1\rho}^* = N_\rho, \quad T_{1\rho\theta} + T_{1\rho\theta}^* = T_{\rho\theta},$$

$$w_1 + \psi R_0 \cos \theta = w, \quad u_1 + u_1^* - \frac{\nu \psi R_0}{8} (\cos \theta - \cos 3\theta) + a \cos \theta = u,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial r} + \psi \cos \theta = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad v_1 + v_1^* - \frac{\nu \psi R_0}{8} (5 \sin \theta + \sin 3\theta) - a \sin \theta = v. \quad (8)$$

Здесь a — жесткое смещение включения вдоль образующей цилиндра, ψ — угол его поворота как жесткого тела.

К граничным условиям (8) следует добавить условие однозначности перемещений в форме (3).

Представляя внутренние усилия и перемещения, входящие в (8), в виде тригонометрических рядов [2], получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно постоянных a_n , b_n , c_n , d_n , a и ψ . В практических расчетах ряды заменяются конечными суммами [4].

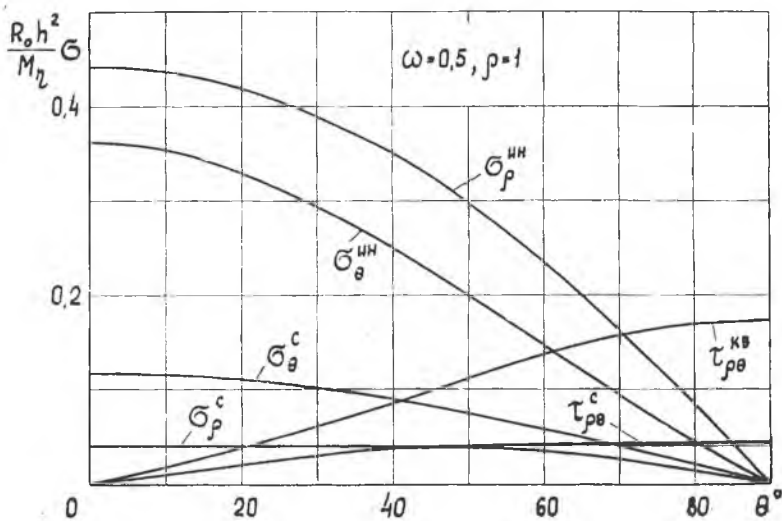


Рис. 1.

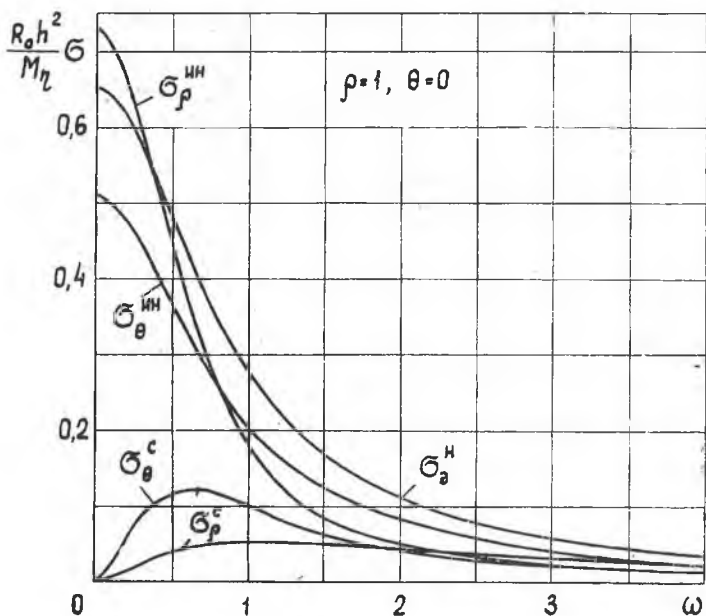


Рис. 2.

Задача была запрограммирована и просчитана на ЭВМ «Урал-2». Коэффициент Пуассона μ принимался равным 0,3. На рис. 1—5 приведены некоторые результаты расчетов для случая $h=h_1$ (гладкая оболочка, нагруженная поверхностными силами по круговой площадке).

На рис. 1 представлен характер изменения компонентов напряжения в оболочке по контуру $\rho=1$ при $\omega=0,5$. Наиболее существенными по величине являются изгибные напряжения $\sigma_p^{ин}$ и $\sigma_\theta^{ин}$. Из рис. 2, где дана для $\rho=1$ и $\theta=0$ зависимость изгибных и мембранных напряжений от параметров ω видно, что с ростом ω (или с ростом кривизны оболочки при фиксированных значениях R_0 и h) изгибные напряжения заметно падают и при $\omega=1,5 \div 2$ становятся соизмеримыми с напряжениями в срединной поверхности. Значению $\omega=0$ соответствует плоская бесконечная пластина, нагруженная по круговой площадке радиуса R_0 . Эквивалентные напряжения $\sigma_a^н$ и $\sigma_a^в$ на наружной и внутренней поверхностях оболочки вычислялись с использованием теории прочности энергии формоизменения.

На рис. 3 показан характер изменения напряжений в оболочке вдоль образующей ($\theta=0$) при $\omega=0,5$. Изгибающие напряжения достигают здесь наибольших значений при $\rho \approx 0,8$, т. е. на нагруженном участке оболочки. Аналогичное явление наблюдается и при

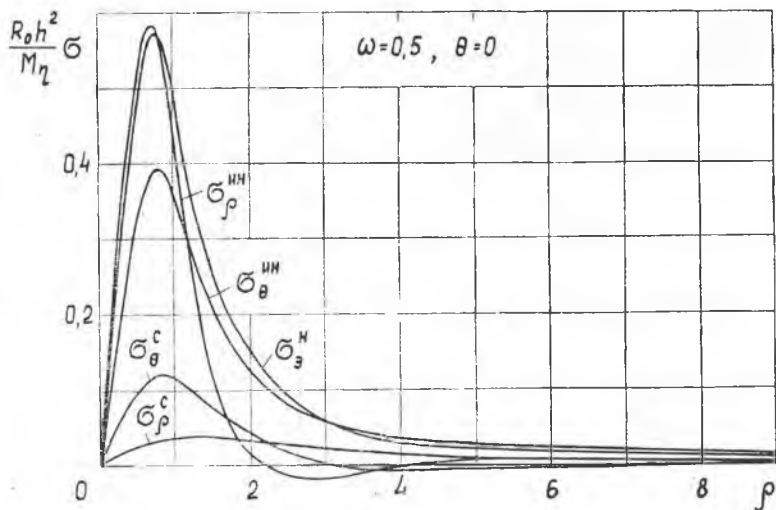


Рис. 3.

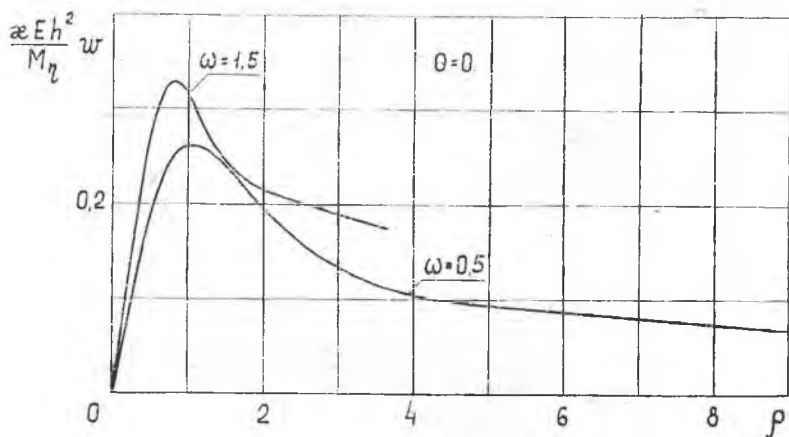


Рис. 4.

других значениях ω . Закон изменения нормальных перемещений вдоль образующей приведен для $\omega = 0,5$ и $\omega = 1,5$ на рис. 4.

Кривые на рис. 5, построенные для $\omega = 0,5$ и $\omega = 1,5$, показывают, что, начиная с $\omega(\rho - 1) \approx 3$, внешний момент $M = \frac{1}{4} \pi R_0^3 q$ воспринимается уже практически только усилиями в срединной поверхности оболочки. Аналогичные результаты были получены и для оболочки, нагруженной моментом через жесткое включение [3].

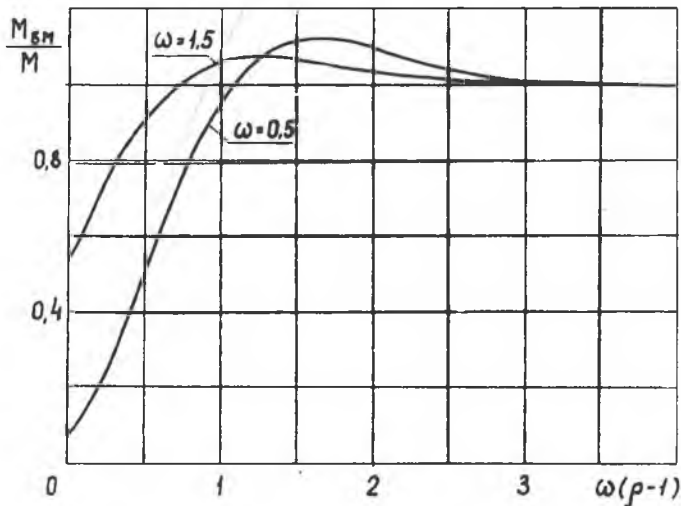


Рис. 5.

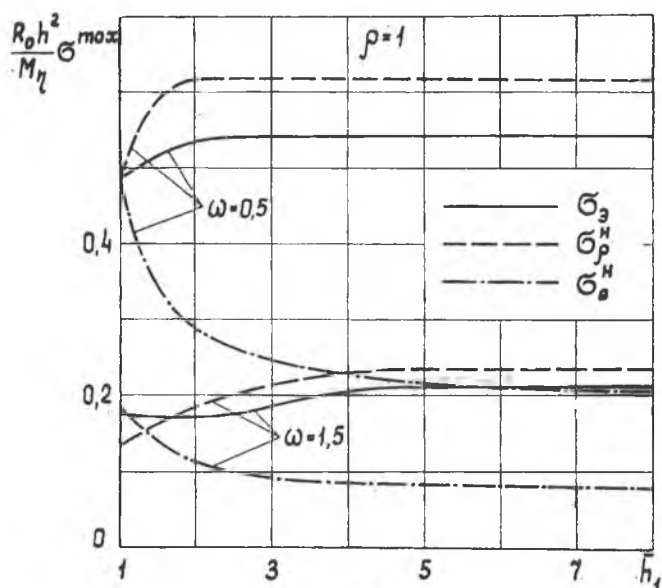


Рис. 6.

На рис. 6 приведены результаты расчетов для $h_1 > h$ при $\omega=0,5$ и $\omega=1,5$. Сплошные линии характеризуют зависимость от $\bar{h}_1 = h_1/h$ максимальных эквивалентных напряжений в оболочке при $\rho=1$, имеющих место для положительных ξ на наружной поверх-

ности. Наибольшим значениям суммарных напряжений σ_p^H и σ_θ^H у наружной поверхности соответствуют штриховые и штрихпунктирные линии. Графики показывают, что с увеличением \bar{h}_1 напряжения σ_p^H возрастают, а σ_θ^H падают. Что же касается максимальных значений эквивалентных напряжений, то они мало чувствительны к изменению относительной толщины включения. В этом смысле можно считать, что результаты вычислений согласуются с выводами А. В. Саченкова и Ю. Г. Коноплева [5], полученными с использованием экспериментально-теоретического метода исследования цилиндрической оболочки с жесткой площадкой нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1947.
2. Хазанов Х. С. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
3. Хазанов Х. С. Напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, нагруженной моментом через абсолютно жесткую круглую шайбу. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.
4. Хазанов Х. С. К изгибу искривленных круглых пластин. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.
5. Коноплев Ю. Г., Саченков А. В. Исследование напряженного состояния круговой цилиндрической оболочки с жесткой площадкой загрузки. Сб. «Исследования по теории пластин и оболочек», № 4, изд-во КГУ, 1966.

