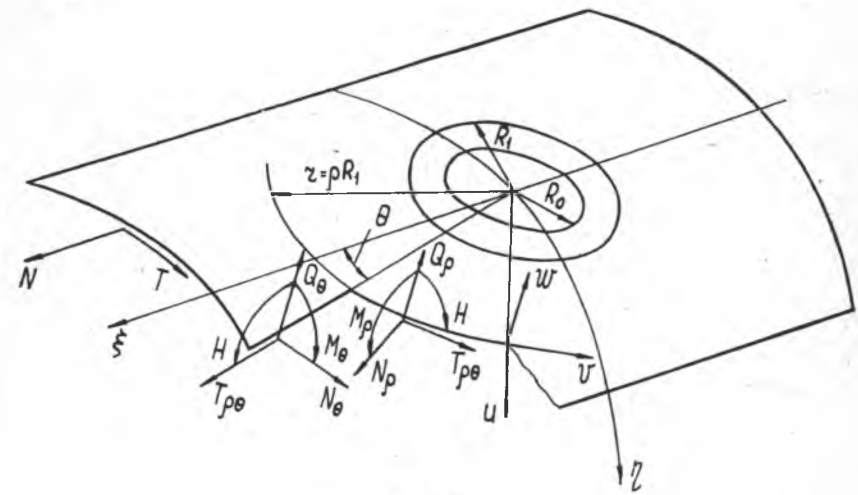
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
*Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.*
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

**Х. С. ХАЗАНОВ**

# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$R$, $h$ — радиус срединной поверхности и толщина оболочки,
$h_1$ — толщина подкрепляющего кольца,
$\bar{h} = \frac{h_1}{h}$ — относительная толщина кольца,
$b$ — ширина кольца,
$R_0$, $R_1$ — радиус внутреннего и наружного контуров кольца соответственно,
$\lambda = \frac{R}{h}$, $\lambda_1 = \frac{R}{h_1}$, $\varkappa = \frac{R_1}{R}$, $\varkappa_0 = \frac{R_0}{R}$ — безразмерные параметры оболочки и кольца,
$\xi$, $\eta$ — безразмерные декартовы координаты точек срединной поверхности оболочки и кольца, отнесенные к радиусу линии спая $R_1$ (начало координат — в центре отверстия),
$\rho = \frac{r}{R_1}$, $\Theta$ — полярные на развертке цилиндра координаты (фиг. 1),




*Фиг. 1.*

$u$, $v$, $w$ — компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки для дополнительного состояния,

$M_\rho$, $M_\Theta$, $H_{\rho\Theta}$, $N_\rho$, $N_\Theta$, $T_{\rho\Theta}$ — изгибающие и крутящие моменты, нормальные и касательные усилия в сечениях оболочки для дополнительного состояния,

$Q_\rho^*$ — обобщенная перерезывающая сила в смысле Кирхгофа,

$E$, $E_1$, $\mu$, $\mu_1$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки и подкрепляющего кольца,

$H_n^{(1)}(z)$, $J_n(z)$ — первые функции Ганкеля и функции Бесселя с целыми индексами.

Примечания: 1. Перемещения и усилия для кольца обозначаются дополнительным индексом $1$ внизу.

2. Перемещения и усилия в основном состоянии обозначаются дополнительным индексом $0$ вверху.

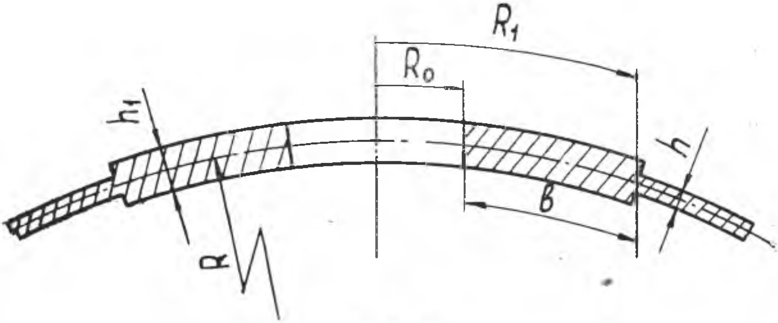
* * *

Первое исследование по концентрации напряжений в цилиндрической оболочке с малым круглым отверстием принадлежит А. И. Лурье [4], [5]. Примененный им метод разложения решения в ряд по степеням малого параметра использован рядом авторов и при решении контактных задач. В работах И. М. Пирогова [6], [7], [8] и в ряде других его статей исследуется напряженное состояние цилиндрической оболочки с малым круговым вырезом, подкрепленным упругим или жестким кольцом. Концентрация напряжений в окрестности жесткой шайбы на поверхности цилиндрической оболочки рассмотрена Ю. А. Шевляковым [15]. Влияние подкрепления малого отверстия тонким упругим кольцом исследовано Н. П. Флейшманом [12]. Этому же вопросу уделено много внимания в монографии Г. Н. Савина и Н. П. Флейшмана [11].

Автору известны лишь две работы, где контактная задача для цилиндрической оболочки с немалым круговым вырезом доведена до числовых результатов. В [3] Леккеркеркер рассмотрел напряженное состояние цилиндрической оболочки, сочлененной с поперечной трубой и нагруженной внутренним давлением. Ван-Дейк в [2] исследовал напряжения в цилиндрической оболочке с абсолютно жестким круглым включением при осевом растяжении и действии внутреннего давления. В обеих работах задачи решаются с применением периодических коэффициентов влияния. Для их подсчета в [3] получено решение дифференциального уравнения пологой цилиндрической оболочки в виде тригонометрических рядов в полярных координатах. В работе же [2] решение записано частично в полярных, частично в декартовых координатах на поверхности оболочки, вследствие чего граничные условия по контуру отверстия удовлетворялись методом точечной коллокации.

В настоящей статье исследуется напряженное состояние цилиндрической оболочки с круглым отверстием, подкрепленным широким кольцом, которое представляется как элемент оболочки. Рассматриваются случаи осевого растяжения и кручения оболочки, нагружение ее внутренним давлением.

Считается, что кольцо и оболочка имеют общую срединную поверхность (фиг. 2). Поскольку кольцо толще оболочки, то приближенно предполагается, что выражения для усилий и перемещений кольца записываются у линии спая так же, как и вдали от нее. Это допущение не должно существенно сказываться на напряженном состоянии оболочки и на напряжениях по внутреннему контуру кольца. Что же касается действительных напряжений в кольце по линии спая, то мы ими интересоваться не будем, так как они не превышают напряжений в оболочке.




*Фиг. 2.*

Напряженное состояние как оболочки, так и кольца можно условно разделить на основное и дополнительное. В основном состоянии внутренние усилия подсчитываются от заданной внешней нагрузки как для оболочки без отверстия. В дополнительном состоянии по внутреннему контуру кольца прикладываются усилия, равные по величине и обратные по направлению, соответствующим усилиям основного состояния. Кроме того, оболочка и кольцо нагружаются по линии спая силами взаимодействия между ними. Суммарные усилия должны обеспечить равенство перемещений кольца и оболочки по линии спая.

Для исследования дополнительного напряженного состояния используется дифференциальное уравнение тонкой пологой цилиндрической оболочки относительно комплексной функции $F(\xi, \eta)$ [5], которое в безразмерных координатах имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 8i\omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0, \tag{1}$$

где

$$F = w + i\varphi, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \times \sqrt{\lambda}\,. \tag{2}$$

Поскольку рассматривается круглое отверстие, то целесообразно перейти к полярным на развертке цилиндра (полугеодезическим) координатам. Для достаточно длинной оболочки решение уравнения (1), полученное Г. Н. Савиным и А. Н. Гузем [10], можно при симметричном или обратно-симметричном относительно $\xi$ и $\eta$ напряженном состоянии привести соответственно к виду [13]*

$$\overline{F}(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=0, 2, 4\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} l_\nu i^\nu A_n^0 \overline{L}_{n\nu}(z) \cos \nu\Theta$$

$$\left( l_\nu = \frac{1}{2} \text{ при } \nu = 0, \ l_\nu = 1 \text{ при } \nu \neq 0 \right)$$

$$\overset{*}{F}(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=2, 4, 6\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^\nu A_n^0 \overset{*}{L}_{n\nu}(z) \sin \nu\Theta, \tag{3}$$

где

$$\overline{L}_{n\nu}(z) = H_n^{(1)}(z)\left[J_{n-\nu}(z) + J_{n+\nu}(z)\right], \ \overset{*}{L}_{n\nu}(z) = H_n^{(1)}(z)\left[J_{n-\nu}(z) - J_{n+\nu}(z)\right].$$

$z = x\sqrt{2i}$, $x = \omega\rho$, $A_n^0$ — комплексные постоянные.

Положив

$$\overline{L}_{n\nu}(z) = \overline{\alpha}_{n\nu}(x) + i\,\overline{\beta}_{n\nu}(x), \quad \overset{*}{L}_{n\nu}(z) = \overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x) + i\overset{*}{\beta}_{n\nu}(x), \ A_n^0 = A_n + iB_n,$$

можно в решениях (3) отделить действительную часть от мнимой. В итоге имеем

$$\overline{w}(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=0,2,4\dots}^{\infty} l_\nu \overline{w}_\nu(x) \cos \nu\Theta, \qquad \overline{\varphi}(\rho,\Theta) = \sum_{\nu=0, 2, 4}^{\infty} l_\nu \overline{\varphi}_\nu(x) \cos \nu\Theta,$$

$$\overset{*}{w}(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=2, 4, 6\dots}^{\infty} \overset{*}{w}_\nu(x) \sin \nu\Theta, \quad \overset{*}{\varphi}(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=2, 4, 6\dots}^{\infty} \overset{*}{\varphi}_\nu(x) \sin \nu\Theta, \tag{4}$$

где

$$\overline{w}_\nu(x) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \overline{\alpha}_{n\nu}(x) - B_n \overline{\beta}_{n\nu}(x)\right],$$

$$\overline{\varphi}_\nu(x) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \overline{\beta}_{n\nu}(x) + B_n \overline{\alpha}_{n\nu}(x)\right]. \tag{5}$$

Для подсчета функций $\overset{*}{w}_\nu(x)$ и $\overset{*}{\varphi}_\nu(x)$ можно воспользоваться рядами типа (5), в которых следует заменить функции с черточками сверху на функции со звездочками, а суммирование по $n$ вести от 1 до $\infty$. Через функцию напряжений $\varphi$ определяются усилия в срединной поверхности, а через перемещение $w$ моменты и перерезывающие силы. Выражения для усилий и перемещений $u$ и $v$, вытекающие из решений (3), приведены в [13].

Заметим, что для исследования напряженного состояния обо-

---

* Здесь и в дальнейшем звездочками сверху обозначаются все величины, относящиеся к обратно-симметричному относительно $\xi$ и $\eta$ напряженному состоянию, а черточками — к симметричному. В [13] приняты несколько иные обозначения: решение $\overline{F}(\rho, \Theta)$ обозначено через $F_2(\rho, \Theta)$, а $\overset{*}{F}(\rho, \Theta)$ — через $F_4(\rho, \Theta)$.

лочки в решениях (3) дифференциального уравнения (1) удержаны лишь убывающие с ростом $\rho$ члены. Для кольца же нужно учесть и возрастающие решения. Тогда имеем:

$$\overline{w}_1(\rho, \Theta) = a + \sum_{\nu=0, 2, 4\ldots}^{\infty} l_\nu \overline{w}_{1\nu}(x_1) \cos \nu\Theta,$$

$$\overline{\varphi}_1(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=0, 2, 4\ldots}^{\infty} l_\nu \overline{\varphi}_{1\nu}(x_1) \cos \nu\Theta$$

$$\overset{*}{w}_1(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=2, 4, 6\ldots}^{\infty} \overset{*}{w}_{1\nu}(x_1) \sin \nu\Theta, \quad \overset{*}{\varphi}_1(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=2, 4, 6\ldots}^{\infty} \overset{*}{\varphi}_{1\nu}(x_1) \sin \nu\Theta, \quad (6)$$

где

$$\overline{w}_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \overline{\alpha}_{n\nu}(x_1) - b_n \overline{\beta}_{n\nu}(x_1) + c_n \overline{\sigma}_{n\nu}(x_1) - d_n \overline{\tau}_{n\nu}(x_1)],$$

$$\overline{\varphi}_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \overline{\beta}_{n\nu}(x_1) + b_n \overline{\alpha}_{n\nu}(x_1) + c_n \overline{\tau}_{n\nu}(x_1) + d_n \overline{\sigma}_{n\nu}(x_1)] \quad (7)$$

и т. д.

Константа $a$ в выражении для $\overline{w}_1$ характеризует жесткое смещение кольца относительно оболочки, которое может иметь место при симметричном относительно $\xi$ и $\eta$ напряженном состоянии. Функции $\sigma_{n\nu}(x_1)$ и $\tau_{n\nu}(x_1)$ определяются из соотношений

$$J_n(z_1)[J_{n-\nu}(z_1) + J_{n+\nu}(z_1)] = \overline{\sigma}_{n\nu}(x_1) + i\, \overline{\tau}_{n\nu}(x_1),$$

$$J_n(z_1)[J_{n-\nu}(z_1) - J_{n+\nu}(z_1)] = \overset{*}{\sigma}_{n\nu}(x_1) + i \overset{*}{\tau}_{n\nu}(x_1),$$

где

$$z_1 = x_1 \sqrt{2i}, \qquad x_1 = \omega_1 \rho.$$

Параметр $\omega_1$ находится по формуле (2) после замены $\lambda$ и $\mu$ на $\lambda_1$ и $\mu_1$. При $\mu_1 = \mu$ имеем

$$\omega_1 = \omega / \sqrt{\overline{h}}\,. \quad (8)$$

Функциям $\overline{F}_1(\rho, \Theta)$ и $\overset{*}{F}_1(\rho, \Theta)$ соответствуют следующие внутренние усилия в сечениях кольца:

$$\overline{M}_{1\rho} = -\frac{\varkappa^2 E_1 R}{64\, \omega_1^2 \lambda_1} \sum_{\nu=0,2,4}^{\infty} l_\nu \overline{M}_{1\rho\nu}(x_1) \cos \nu\Theta,$$

$$\overline{Q}^*_{1\rho} = -\frac{\varkappa E_1}{64\, \omega_1 \lambda_1} \sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} l_\nu \overline{Q}_{1\rho\nu}(x_1) \cos \nu\Theta,$$

$$\overline{N}_{1\rho} = -\frac{E_1}{8 \lambda_1 x_1} \sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} l_\nu \overline{N}_{1\rho\nu}(x_1) \cos \nu\Theta,$$

$$\overline{T}_{1\rho\Theta} = -\frac{E_1}{8\lambda_1 x_1}\sum_{\nu=2,4,6}^{\infty} \nu\overline{T}_{\nu}(x_1)\sin\nu\Theta,$$

$$\overline{M}_{1\Theta} = -\frac{\varkappa^2 E_1 R}{64\omega_1^2\lambda_1}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} l_\nu \overline{M}_{1\Theta\nu}(x_1)\cos\nu\Theta,$$

$$\overline{H}_{1\rho\Theta} = \frac{\varkappa^2 E_1 R(1-\mu)}{64\omega_1^2\lambda_1 x_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} \nu\overline{H}_{1\nu}(x_1)\sin\nu\Theta, \tag{9}$$

$$\overline{N}_{1\Theta} = -\frac{E_1}{8\lambda_1}\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} l_\nu \overline{N}_{1\Theta\nu}(x_1)\cos\nu\Theta,$$

$$\overset{*}{M}_{1\rho} = -\frac{\varkappa^2 E_1 R}{64\omega_1^2\lambda_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} \overset{*}{M}_{1\rho\nu}(x_1)\sin\nu\Theta,$$

$$\overset{*}{Q}_{1\rho} = -\frac{\varkappa E_1}{64\omega_1\lambda_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} Q_{1\rho\nu}(x_1)\sin\nu\Theta,$$

$$\overset{*}{N}_{1\rho} = -\frac{E_1}{8\lambda_1 x_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} \overset{*}{N}_{1\rho\nu}(x_1)\sin\nu\Theta,$$

$$\overset{*}{T}_{1\rho\Theta} = \frac{E_1}{8\lambda_1 x_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} \nu\overset{*}{T}_{1\nu}(x_1)\cos\nu\Theta,$$

$$\overset{*}{M}_{1\Theta} = -\frac{\varkappa^2 E_1 R}{64\omega_1^2\lambda_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} \overset{*}{M}_{1\Theta\nu}(x_1)\sin\nu\Theta,$$

$$\overset{*}{H}_{1\rho\Theta} = -\frac{\varkappa^2 E_1 R(1-\mu)}{64\omega_1^2\lambda_1 x_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} \nu\overset{*}{H}_{1\nu}(x_1)\cos\nu\Theta,$$

$$\overset{*}{N}_{1\Theta} = -\frac{E}{8\lambda_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} \overset{*}{N}_{1\Theta\nu}(x_1)\sin\nu\Theta, \tag{10}$$

где*

$$\overline{M}_{1\rho\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2}\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\overline{f}_1(x_1) - b_n\overline{f}_2(x_1) + c_n\overline{\psi}_1(x_1) - d_n\overline{\psi}_2(x_1)],$$

$$\overline{Q}_{1\rho\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2}\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\overline{f}_3(x_1) - b_n\overline{f}_4(x_1) + c_n\overline{\psi}_3(x_1) - d_n\overline{\psi}_4(x_1)],$$

$$\overline{N}_{1\rho\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2}\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\overline{f}_6(x_1) + b_n\overline{f}_5(x_1) + c_n\overline{\psi}_6(x_1) + d_n\overline{\psi}_5(x_1)],$$

---

* Во избежание громоздкости записи в обозначениях функций $f_1(x_1)$, $f_2(x_1)\ldots$ опущены дополнительные индексы $n\nu$.

$$\overline{T}_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n\overline{f}_8(x_1) + b_n\overline{f}_7(x_1) + c_n\overline{\psi}_8(x_1) + d_n\overline{\psi}_7(x_1)],$$

$$\overline{M}_{1\Theta\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n\overline{f}_9(x_1) - b_n\overline{f}_{10}(x_1) + c_n\overline{\psi}_9(x_1) - d_n\overline{\psi}_{10}(x_1)],$$

$$\overline{H}_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n\overline{f}_7(x_1) - b_n\overline{f}_8(x_1) + c_n\overline{\psi}_7(x_1) - d_n\overline{\psi}_8(x_1)],$$

$$\overline{N}_{1\Theta\nu}(x_1) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n\overline{f}_{12}(x_1) + b_n\overline{f}_{11}(x_1) + c_n\overline{f}_{12}(x_1) + d_n\overline{\psi}_{11}(x_1)]. \qquad (11)$$

Выражения, входящие в (11), определяются по формулам:

$$\overline{f}_1(x_1) = \overline{\alpha}''_{n\nu}(x_1) + \frac{\mu}{x_1}\overline{\alpha}'_{n\nu}(x_1) - \frac{\mu\nu^2}{x_1^2}\overline{\alpha}_{n\nu}(x_1),$$

$$\overline{f}_3(x_1) = \overline{\alpha}'''_{n\nu}(x_1) + \frac{1}{x_1}\overline{\alpha}''_{n\nu}(x_1) - \frac{1+(2-\mu)\nu^2}{x_1^2}\overline{\alpha}'_{n\nu}(x_1) + \frac{(3-\mu)\nu^2}{x_1}\overline{\alpha}_{n\nu}(x_1),$$

$$\overline{f}_5(x_1) = \overline{\alpha}'_{n\nu}(x_1) - \frac{\nu^2}{x_1}\overline{\alpha}_{n\nu}(x_1),\quad \overline{f}_7(x_1) = \overline{\alpha}_{n\nu}(x_1) - \frac{1}{x_1}\overline{\alpha}_{n\nu}(x_1),$$

$$\overline{f}_9(x_1) = \mu\overline{\alpha}''_{n\nu}(x_1) + \frac{1}{x_1}\overline{\alpha}'_{n\nu}(x_1) - \frac{\nu^2}{x_1^2}\overline{\alpha}_{n\nu}(x_1),\quad \overline{f}_{11}(x_1) = \overline{\alpha}''_{n\nu}(x_1). \qquad (12)$$

Штрихами здесь обозначены производные по $x_1$. Функции с четными индексами $f_{2к}(x_1)$ подсчитываются по формулам для $f_{2к-1}(x_1)$, в которых $\overline{\alpha}_{n\nu}(x_1)$ заменяется на $\overline{\beta}_{n\nu}(x_1)$. Функции $\psi(x_1)$ находятся, как и $f(x_1)$ с соответствующими индексами, если заменить $\overline{\alpha}_{n\nu}(x_1)$ и $\overline{\beta}_{n\nu}(x_1)$ на $\overline{\sigma}_{n\nu}(x_1)$ и $\overline{\tau}_{n\nu}(x_1)$.

Выражения для подсчета $\overset{*}{M}_{1\rho\nu}(\rho)$, $\overset{*}{N}_{1\rho\nu}(\rho)$ и т. д. получаются из (11) и (12), если вести суммирование по $n$ от 1 до $\infty$, а вместо функций с черточками сверху подставить соответствующие функции со звездочками.

Внутренние усилия в сечениях оболочки $\overline{M}_\rho$, $\overset{*}{M}_\rho$, ... $\overline{N}_\Theta$, $\overset{*}{N}_\Theta$ можно определить по формулам (9)—(12), в которых опускаются возрастающие функции $\psi(x)$, $aE_1$, $\lambda_1$, $\omega_1$, $x_1$, $a_n$ и $b_n$ заменяются соответственно на $E$, $\lambda$, $\omega$, $x$, $A_n$ и $B_n$.

Можно показать, что внутренние усилия, определяемые (9)—(12), будучи приложенными по замкнутому контуру $\rho=\text{const}$, тождественно удовлетворяют всем уравнениям равновесия.

Как показано в [13], перемещения $u$ и $v$ точек срединной поверхности оболочки можно представить также рядами. Применительно к кольцу они имеют вид

$$\bar{u}_1(\rho, \Theta) = \frac{\varkappa x_1}{8\omega_1}\Big[-4a(1-\cos 2\Theta) + \sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} l_\nu \bar{u}_{1\nu}(x_1)\cos\nu\Theta\Big],$$

$$\bar{v}_1(\rho, \Theta) = \frac{\varkappa x_1}{8\omega_1}\Big[-4a\sin 2\Theta + \sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty} \bar{v}_{1\nu}(x_1)\sin\nu\Theta\Big],$$

$$\overset{*}{u}_1(\rho, \Theta) = \frac{\varkappa x_1}{8\omega_1}\sum_{\nu=2,4,6\ldots}^{\infty}\overset{*}{u}_{1\nu}(x_1)\sin\nu\Theta,$$

$$\overset{*}{v}_1(\rho, \Theta) = -\frac{\varkappa x_1}{8\omega_1}\Big[c + \sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{\infty} l_\nu \overset{*}{v}_{1\nu}(x_1)\cos\nu\Theta\Big]. \tag{13}$$

Для $\nu \geqslant 2$:

$$\bar{u}_{1\nu}(x_1) = \frac{(-1)^{\nu/2}}{\nu^2-1}\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n[\bar{s}_2(x_1) + \bar{s}_3(x_1)] + b_n[\bar{s}_1(x_1) - \bar{s}_4(x_1)] + c_n[\bar{r}_2(x_1) + \bar{r}_3(x_1)] + d_n[\bar{r}_1(x_1) - \bar{r}_4(x_1)]\},$$

$$\bar{v}_{1\nu}(x_1) = \frac{(-1)^{\nu/2}}{\nu(\nu^2-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n[(\bar{s}_6(x_1) + \bar{s}_7(x_1)] + b_n[\bar{s}_5(x_1) - \bar{s}_8(x_1)] + c_n[\bar{r}_6(x_1) + \bar{r}_7(x_1)] + d_n[\bar{r}_5(x_1) - \bar{r}_8(x_1)]\}, \tag{14}$$

где

$$\bar{s}_1(x_1) = -x_1\bar{\alpha}'''_{n\nu}(x_1) + \frac{(2+\mu)\nu^2+1-\mu}{x_1}\bar{\alpha}'_{n\nu}(x_1) - \frac{3\nu^2}{x_1^2}\bar{\alpha}_{n\nu}(x_1),$$

$$\bar{s}_3(x_1) = 4\bar{\alpha}_{n\nu}(x_1) + 2(2\nu+1)\bar{\alpha}_{n,\nu+2}(x_1) - 2(2\nu-1)\alpha_{n,\nu-2}(x_1) - 4x_1\bar{\alpha}'_{n\nu}(x_1) + 2x_1\bar{\alpha}'_{n\nu+2}(x_1) + 2x_1\bar{\alpha}'_{n,\nu-2}(x_1),$$

$$\bar{s}_5(x_1) = -\bar{s}_1(x_1) - (\nu^2-1)[\bar{\alpha}''_{n\nu}(x_1) - \frac{\mu}{x_1}\bar{\alpha}'_{n\nu}(x_1) + \frac{\mu\nu^2}{x_1^2}\bar{\alpha}_{n\nu}(x_1)],$$

$$\bar{s}_7(x_1) = -\bar{s}_3(x_1) - 2(\nu^2-1)[2\bar{\alpha}_{n\nu}(x_1) - \bar{\alpha}_{n,\nu+2}(x_1) - \bar{\alpha}_{n,\nu-2}(x_1)]. \tag{15}$$

Чтобы получить формулы для возрастающих функций, нужно в (15) вместо $\bar{s}_{2k-1}(x_1)$ и $\bar{\alpha}_{n\nu}(x_1)$ подставить соответственно $\bar{r}_{2k-1}(x_1)$ и $\bar{\sigma}_{n\nu}(x_1)$. Заменой $\bar{s}_{2k-1}(x_1)$ и $\alpha_{n\nu}(x_1)$ на $\bar{s}_{2k}(x_1)$, $\bar{\beta}_{n\nu}(x_1)$, а $\bar{r}_{2k-1}(x_1)$ и $\bar{\sigma}_{n\nu}(x_1)$ на $\bar{r}_{2k}(x_1)$ и $\bar{\tau}_{n\nu}(x_1)$ получаются выражения для определения функций с четными индексами. Ряды для $\overset{*}{u}_{1\nu}(x_1)$ и $\overset{*}{v}_{1\nu}(x_1)$ подсчитываются по формулам (14), (15), в которых суммирование по $n$ следует вести от 1 до $\infty$, а все функции с черточками сверху заменить на соответствующие функции со звездочками.

Для $\overline{u}_{1\nu}(x_1)$ при $\nu = 0$ имеем

$$\overline{u}_{1,0}(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n [s_{10}(x_1) + s_{11}(x_1)] + b_n [s_9(x_1) - s_{12}(x_1)] + $$
$$+ c_n [r_{10}(x_1) + r_{11}(x_1)] + d_n [r_9(x_1) - r_{12}(x_1)] \}, \tag{16}$$

где

$$s_9(x_1) = - \overline{\alpha}''_{n0}(x_1) + \frac{\mu}{x_1} \overline{\alpha}'_{n0}(x_1), \; s_{11}(x_1) = 4 [\overline{\alpha}_{n2}(x_1) - \overline{\alpha}_{n0}(x_1)]. \tag{17}$$

Остальные величины, входящие в (16), получаются из (17) по указанной выше схеме.

Значения $\overset{*}{v}_{1\nu}(x_1)$ для $\nu = 0$ определяются по формуле

$$\overset{*}{v}_{1,0}(x_1) = -8 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n s_{14}(x_1) + b_n s_{13}(x_1) + c_n r_{14}(x_1) + d_n r_{13}(x_1)]. \tag{18}$$

Здесь

$$s_{13}(x_1) = n \left[\frac{1}{\pi q_n} + \frac{1}{2x_1^2} \overline{\alpha}_{n0}(x_1)\right],$$

$$s_{14}(x_1) = \frac{n}{x_1^2}\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \overline{\beta}_{n0}(x_1)\right],$$

$$(q_n = 4 \text{ при } n = 1, \; q_n = n^2 - 1 \text{ при } n \neq 1)$$

$$r_{13}(x_1) = \frac{n}{2x_1^2} \overline{\sigma}_{n0}(x_1), \quad r_{14}(x_1) = \frac{n}{2x_1^2} \overline{\tau}_{n0}(x_1). \tag{19}$$

Константа $c$ в (13) характеризует жесткое вращение кольца относительно оси, проходящей через начало координат и нормальной к срединной поверхности оболочки. Появляется она при интегрировании геометрических соотношений.

Перемещения точек срединной поверхности оболочки $u$ и $v$ можно найти по формулам (13)—(19), в которых отбрасываются возрастающие функции, а $x_1$, $\omega_1$, $a_n$ и $b_n$ заменяются соответственно на $x$, $\omega$, $A_n$ и $B_n$. Постоянные $a$ и $c$ в (13) при этом следует считать равными нулю.

Перемещения, определяемые выражениями (13)—(19), тождественно удовлетворяют условиям однозначности.

Для симметричного относительно $\xi$ и $\eta$ напряженного состояния граничные условия имеют вид:

а) по линии спая, при $\rho = 1$,

$$\overline{M}_{1\rho} = \overline{M}_\rho, \quad \overline{Q}^*_{1\rho} = \overline{Q}^*_\rho, \quad \overline{N}_{1\rho} = \overline{N}_\rho, \quad \overline{T}_{1\rho\theta} = \overline{T}_{\rho\theta},$$

$$\overline{w}_1 + w_1^0 = \overline{w} + w^0, \quad \frac{\partial \overline{w}_1}{\partial \rho} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial \rho}, \quad \overline{u}_1 + u_1^0 = \overline{u} + u^0,$$

$$\overline{v}_1 + v_1^0 = \overline{v} + v^0; \tag{20}$$

б) по внутреннему контуру кольца, при $\rho = \rho_0 = \frac{R_0}{R_1}$,

$$\overline{M}_{1\rho} + M^0_{1\rho} = 0, \ \overline{Q}^*_{1\rho} + Q^0_{1\rho} = 0, \quad \overline{N}_{1\rho} + N^0_{1\rho} = 0, \quad \overline{T}_{1\rho\theta} + T^0_{1\rho\theta} = 0. \quad (21)$$

В (20) учтено, что для основного состояния соответствующие усилия в кольце и оболочке равны между собой.

При практических расчетах можно в выражениях для усилий и перемещений дополнительного состояния перейти от бесконечных рядов к усеченным, ограничив суммирование до $n=\nu=k$, где $k$ зависит от степени сходимости решения. В этом случае, полагая материалы кольца и оболочки одинаковыми ($E_1=E$, $\mu_1=\mu$), получим для определения постоянных, на основании (20) и (21), следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$1.\ \overline{M}_{\rho\nu}(\omega) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^4 \overline{M}_{1\rho\nu}(\omega_1) = 0 \qquad (\nu = 0, 2, 4 \dots k)$$

$$2.\ \overline{Q}_{\rho\nu}(\omega) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 \overline{Q}_{1\rho\nu}(\omega_1) = 0 \qquad ,,$$

$$3.\ \overline{N}_{\rho\nu}(\omega) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 \overline{N}_{1\rho\nu}(\omega_1) = 0 \qquad (\nu = 2, 4, 6 \dots k)$$

$$4.\ \overline{T}_{\nu}(\omega) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 \overline{T}_{1\nu}(\omega_1) = 0 \qquad ,,$$

$$5.\ \overline{w}_{\nu}(\omega) - \overline{w}_{1\nu}(\omega_1) - 2\gamma_{\nu}\, a = \hat{w}_{\nu} \qquad (\nu = 0, 2, 4 \dots k)$$

$$6.\ \overline{w}'_{\nu}(\omega) - \frac{\omega_1}{\omega} \overline{w}'_{1\nu}(\omega_1) = 0 \qquad ,,$$

$$7.\ \overline{u}_{\nu}(\omega) - \overline{u}_{1\nu}(\omega_1) + 4\overline{\gamma}_{\nu}\, a = \hat{u}_{\nu} \qquad (\nu = 0, 2, 4 \dots k)$$

$$8.\ \overline{v}_{\nu}(\omega) - \overline{v}_{1\nu}(\omega_1) - 4\overline{\gamma}_{\nu}\, a = \hat{v}_{\nu} \qquad (\nu = 2, 4, 6 \dots k)$$

$$9.\ \overline{M}_{1\rho\nu}(\omega_2) = \hat{M}_{\nu}, \quad 10.\ Q_{1\rho\nu}(\omega_2) = \hat{Q}_{\nu} \qquad (\nu = 0, 2, 4 \dots k)$$

$$11.\ \overline{N}_{1\rho\nu}(\omega_2) = \hat{N}_{\nu}, \quad 12.\ \overline{T}_{1\nu}(\omega_2) = \hat{T}_{\nu} \quad (\nu = 2, 4, 6 \dots k) \quad (22)$$

Здесь $\omega_2 = \omega_1 \rho_0$

$$\gamma_{\nu} = 1 \text{ при } \nu = 0, \qquad \gamma_{\nu} = 0 \text{ при } \nu \neq 0$$

$$\overline{\gamma}_{\nu} = 2 \text{ при } \nu = 0,\ \overline{\gamma}_{\nu} = -1 \text{ при } \nu = 2,\ \overline{\gamma}_{\nu} = 0 \text{ при } \nu > 2$$

Строго говоря, уравнения типа 3 и 11 в (22) следует записать и для $\nu = 0$. Однако, как показали проведенные исследования, уравнения 2—0, 3—0, 3—2, 4—2 (вторая цифра характеризует индекс $\nu$) оказываются линейно зависимыми. Линейно зависимыми являются и левые части уравнений 10—0, 11—0, 11—2 и 12—2.

При этом между правыми частями должно соблюдаться соотношение

$$\overset{\wedge}{Q}_0 - 4\overset{\wedge}{N}_0 + 4\overset{\wedge}{N}_2 - 8\overset{\wedge}{T}_2 = 0, \tag{23}$$

которое вытекает и из равенства нулю главного вектора усилий, действующих по краю отверстия в основном состоянии. В итоге система (22) содержит $6k+7$ линейно независимых уравнений с таким же числом неизвестных.

Если напряженное состояние обратно-симметрично относительно $\xi$ и $\eta$, то в граничных условиях (20) и (21) следует все величины с черточками заменить на соответствующие величины со звездочками. Система уравнений для определения постоянных ($E_1=E$, $\mu_1=\mu$) примет при этом вид:

$$\begin{gathered}
1.\ \overset{*}{M}_{\rho\nu}(\omega) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^4 \overset{*}{M}_{1\rho\nu} = 0,\ \ 2.\ \overset{*}{Q}_{\rho\nu}(\omega) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 \overset{*}{Q}_{1\rho\nu}(\omega_1) = 0,\\
3.\ \overset{*}{N}_{\rho\nu}(\omega) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 \overset{*}{N}_{1\rho\nu}(\omega_1) = 0,\ \ 4.\ \overset{*}{T}_{\nu}(\omega) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^3 \overset{*}{T}_{1\nu}(\omega_1) = 0,\\
5.\ \overset{*}{w}_{\nu}(\omega) - \overset{*}{w}_{1\nu}(\omega_1) = 0,\ \ 6.\ \overset{*}{w}{}^1_{\nu}(\omega) - \frac{\omega_1}{\omega}\overset{*}{w}{}^1_{\nu}(\omega_1) = 0,\\
7.\ \overset{*}{u}_{\nu}(\omega) - \overset{*}{u}_{1\nu}(\omega_1) = \overset{\wedge}{u}_{\nu},\quad 8.\ \overset{*}{v}_{\nu}(w) - \overset{*}{v}_{1\nu}(\omega_1) - \overset{*}{\gamma}_{\nu}c = \overset{\wedge}{v}_{\nu},\\
9.\ \overset{*}{M}_{1\rho\nu}(\omega_2) = 0,\qquad 10.\ \overset{*}{Q}_{1\rho\nu}(\omega_2) = 0,\\
11.\ \overset{*}{N}_{1\rho\nu}(\omega_2) = \overset{\wedge}{N}_{\nu},\quad 12.\ \overset{*}{T}_{1\nu}(\omega_2) = \overset{\wedge}{T}_{\nu},
\end{gathered} \tag{24}$$

где $\overset{*}{\gamma}_{\nu} = 2$ при $\nu = 0$, $\overset{*}{\gamma}_{\nu} = 0$ при $\nu \neq 0$.

Для всех типов уравнений системы (24), кроме 8-го, нужно положить $\nu=2, 4, 6, \ldots k$. В уравнениях же типа 8 следует дополнительно принять $\nu=0$.

а) *Осевое растяжение оболочки.* По торцам достаточно длинной оболочки приложены равномерно распределенные нормальные силы N. В основном состоянии имеем

$$\overset{\circ}{N}_{1\rho} = \overset{\circ}{N}_{\rho} = \frac{N}{2}(1+\cos 2\Theta),\ \ \overset{\circ}{N}_{1\Theta} = \overset{\circ}{N}_{\Theta} = \frac{N}{2}(1-\cos 2\Theta),$$

$$\overset{\circ}{T}_{1\rho\Theta} = \overset{\circ}{T}_{\rho\Theta} = -\frac{N}{2}\sin 2\Theta. \tag{25}$$

Перемещения точек срединной поверхности кольца по линии спая будут равны

$$\overset{\circ}{w}_1 = -\mu\frac{\lambda_1 N}{E},\quad \overset{\circ}{u}_1 = \frac{\varkappa\lambda_1 N}{2E}(1+\cos 2\Theta),\quad \overset{\circ}{v}_1 = -\frac{\varkappa\lambda_1 N}{2E}\sin 2\Theta. \tag{26}$$

Заменив здесь $\lambda_1$ на $\lambda$, получим перемещения оболочки. Для правых частей системы (22) имеем

$$\hat{w}_0 = -\frac{\mu}{2}\hat{u}_2,\ \hat{w}_\nu = 0 \text{ при } \nu \neq 0,\ \hat{M}_\nu = \hat{Q}_\nu = 0,$$

$$\hat{u}_0 = 2\hat{u}_2,\ \hat{u}_2 = -4\left[1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right]\frac{\lambda N}{E},\ \hat{v}_2 = -\hat{u}_2,\ \hat{u}_\nu = \hat{v}_\nu = 0 \text{ при } \nu > 2,$$

$$\hat{N}_0 = 2\hat{N}_2,\ \hat{N}_2 = 4\omega_2\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\frac{\lambda N}{E},\ \hat{T}_2 = -\frac{1}{2}\hat{N}_2,\ \hat{N}_\nu = \hat{T}_\nu = 0 \text{ при } \nu > 2. \tag{27}$$

б) *Действие внутреннего давления.* Оболочка с днищем нагружена внутренним давлением $p$. Предполагается, что отверстие закрыто крышкой, передающей на кольцо поперечную нагрузку $q_0 = \frac{pR_0}{2}$, равномерно распределенную по контуру отверстия. В основном состоянии имеет место

$$N^\circ_{1\rho} = N^\circ_\rho = \frac{pR}{4}(3-\cos 2\Theta),\ N^\circ_{1\theta} = N^\circ_\theta = \frac{pR}{4}(3+\cos 2\Theta),$$
$$T^\circ_{1\rho\theta} = T^\circ_{\rho\theta} = \frac{pR}{4}\sin 2\Theta. \tag{28}$$

Перемещения точек срединной поверхности кольца запишутся при этом в виде

$$w_1^0 = \frac{(2-\mu)\lambda_1 pR}{2E},\quad u_1^0 = \frac{(1-2\mu)\varkappa\lambda_1 pR}{4E}(1+\cos 2\Theta),$$
$$v_1^0 = -\frac{(1-2\mu)\varkappa\lambda_1 pR}{4E}\sin 2\Theta. \tag{29}$$

Для оболочки по линии спая перемещения получаются из (29) заменой $\lambda_1$ на $\lambda$. Правые части системы (22) в этом случае равны

$$\hat{w}_0 = \frac{2-\mu}{2(1-2\mu)}\hat{u}_2,\ \hat{Q}_0 = -32\hat{N}_2,\ \hat{w}_\nu = \hat{Q}_\nu = 0 \text{ при } \nu \neq 0,\ \hat{M}_\nu = 0,$$

$$\hat{u}_0 = 2\hat{u}_2,\ \hat{u}_2 = -2(1-2\mu)\left[1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right]\frac{\lambda pR}{E},\ \hat{v}_2 = -\hat{u}_2,\ \hat{u}_\nu = \hat{v}_\nu = 0$$
$$\text{при } \nu > 2,$$

$$\hat{N}_0 = -6\hat{N}_2,\ \hat{N}_2 = -2\omega_2\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\frac{\lambda pR}{E},\ \hat{T}_2 = -\frac{1}{2}\hat{N}_2,\ \hat{N}_\nu = \hat{T}_\nu = 0$$
$$\text{при } \nu > 2. \tag{30}$$

в) *Кручение оболочки.* По торцам оболочки приложены равномерно распределенные касательные силы T, создающие крутящий момент $M_\kappa = 2\pi R^2 T$. В основном состоянии получим

$$N^\circ_{1\rho} = N^\circ_\rho = T\sin 2\Theta,\ N^\circ_{1\theta} = N^\circ_\theta = -T\sin 2\Theta,\ T^\circ_{1\rho\theta} = T^\circ_{\rho\theta} = T\cos 2\Theta. \tag{31}$$

Этим усилиям соответствуют перемещения кольца по линии спая

$$w_1^0 = 0,\ u_1^0 = \frac{(1+\mu)\varkappa\lambda_1 T}{E}\sin 2\Theta,\quad v_1^0 = \frac{(1+\mu)\varkappa\lambda_1 T}{E}\cos 2\Theta, \tag{32}$$

а правые части системы (24) имеют вид

$$\hat{u}_2 = -8(1+\mu)\left[1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right]\frac{\lambda T}{E},\ \hat{v}_2 = -\hat{u}_2,\ \hat{u}_\nu = \hat{v}_\nu = 0 \text{ при } \nu \neq 2.$$

$$\hat{N}_2 = 8\omega_2\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\frac{\lambda T}{E},\ \hat{T}_2 = -\frac{1}{2}\hat{N}_2,\ \hat{N}_\nu = \hat{T}_\nu = 0 \text{ при } \nu \neq 2. \quad (33)$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести параметр

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\varkappa_0\sqrt{\lambda}, \quad (34)$$

который характеризует оболочку с неподкрепленным отверстием радиуса $R_0$. Обозначим, далее, через $b_0$ ширину кольца, найденную для заданного значения $\bar{h}$ по так называемому «правилу площадей» (из условия равенства площадей поперечного сечения оболочки с подкрепленным отверстием при $\xi=0$ и оболочки без отверстия). Имеем:

$$b_0 = \frac{R_0}{\bar{h}-1}, \quad (35)$$

Рассмотренные выше задачи были запрограммированы и просчитаны на ЭВМ «Урал-2»*. Коэффициент Пуассона $\mu$ принимался равным 0,3. В этом случае

$$\omega_0 = 0{,}6427\varkappa_0\sqrt{\lambda} = 0{,}6427\frac{R_0}{\sqrt{Rh}}. \quad (36)$$

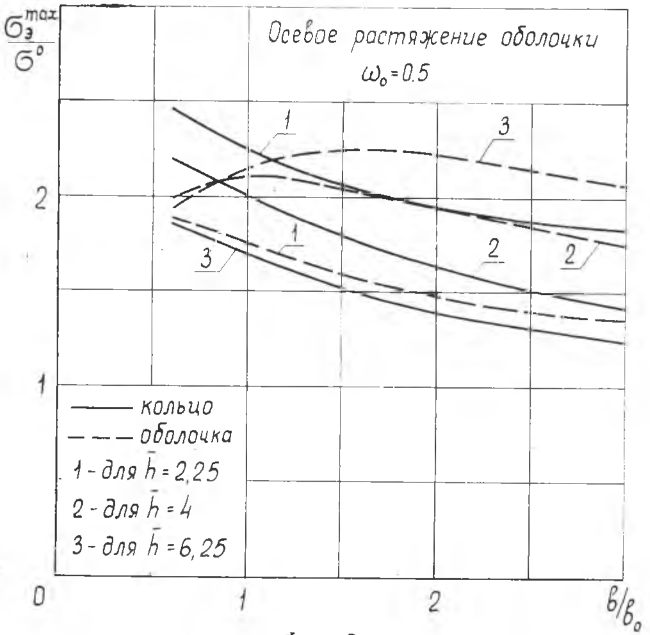
Параметр $\omega_0$ изменялся в пределах от 0,5 до 3, относительная толщина кольца $\bar{h}$ изменялась от 2,25 до 9, а его относительная ширина $\bar{b} = \frac{b}{b_0}$ — от 0,6 до 3. Вычисления проводились с удержанием в решениях (4) и (6) различного числа гармоник. Для $\omega_0 = 0{,}5$ достаточная точность расчета получилась уже при $k = \nu_{max} = 4$, а для $\omega_0 = 3$ это наблюдалось при $k=8$. Более детально вопрос о сходимости решений типа (4) освещен в работе автора [14].

В процессе расчета вычислялись компоненты напряжения в оболочке по линии спая и напряжения по внутреннему контуру кольца. Поскольку в оболочке действуют изгибные и мембранные напряжения $\sigma_\rho$, $\sigma_\Theta$ и $\tau_{\rho\Theta}$, то для оценки ее напряженного состояния подсчитывались по 3-ей теории прочности (теории наибольших касательных напряжений) эквивалентные напряжения $\sigma_э$. На внутреннем контуре кольца имеет место одноосное напряженное состояние, вследствие чего здесь $\sigma_э = \sigma_\Theta^N \pm \sigma_\Theta^M$. Результаты расчета представлены в виде безразмерных величин, т. е. как отношение наибольших эквивалентных напряжений $\sigma_э^{max}$, действующих в оболочке или в кольце, к характерным напряжениям для оболочки без отверстия при тех же внешних нагрузках.

* Программирование задач и вычисления на ЭВМ выполнены инженером Г. В. Кановой.

При осевом растяжении напряжения относились к $\sigma^{\circ} = \frac{N}{h}$, при действии внутреннего давления — к $\sigma^{\circ} = \frac{pR}{h}$, при кручении оболочки — к $\tau^{\circ} = \sigma^{\circ} = \frac{T}{h}$.

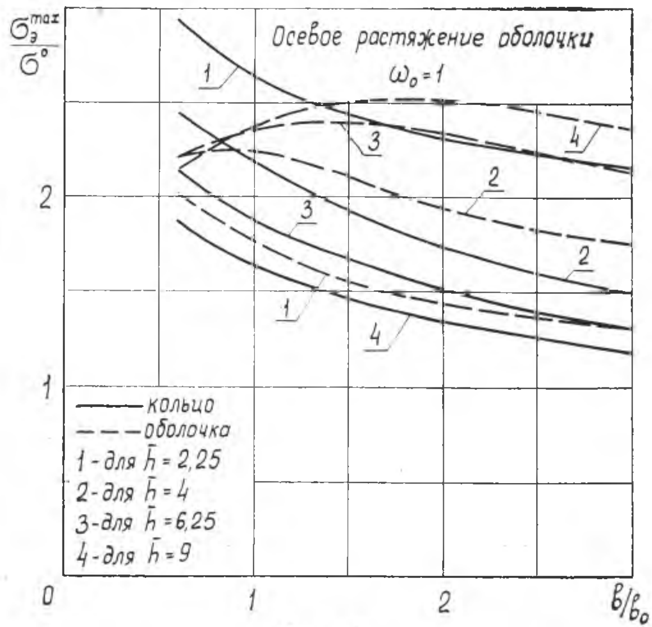
Влияние относительной ширины кольца $\bar{b}$ на напряженное состояние кольца и оболочки при различных значениях $\omega_0$ и $\bar{h}$ показано для случая осевого растяжения на фиг. 3—6. Штриховые линии соответствуют $\sigma_э^{max}$ в оболочке по линии спая, а сплош-



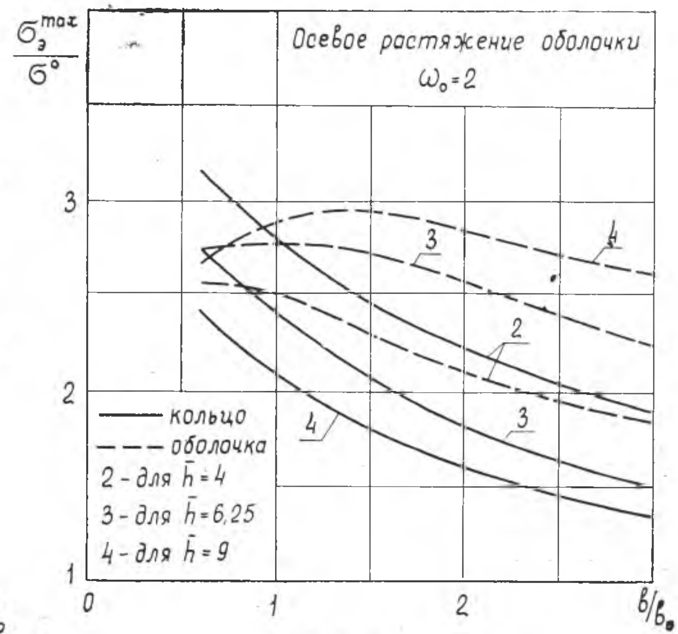

*Фиг. 3.*

ные — по внутреннему контуру кольца. Эквивалентные напряжения в оболочке достигают максимума при $\Theta = 45$—$55°$, в кольце же — при $\Theta = 90°$. Нагружению оболочки внутренним давлением соответствуют кривые на фиг. 7—10. Наиболее напряженная точка оболочки находится, как правило, при $\Theta = 40$—$50°$, однако для больших $\omega_0$ она смещается к $\Theta = 0$. Для кольца здесь $\Theta = 0$. На фиг. 11—14 даны аналогичные графики для кручения оболочки. В оболочке по линии спая $\sigma_э^{max}$ имеет место при $\Theta = 90°$, а по внутреннему контуру кольца — при $\Theta = 45$—$50°$.

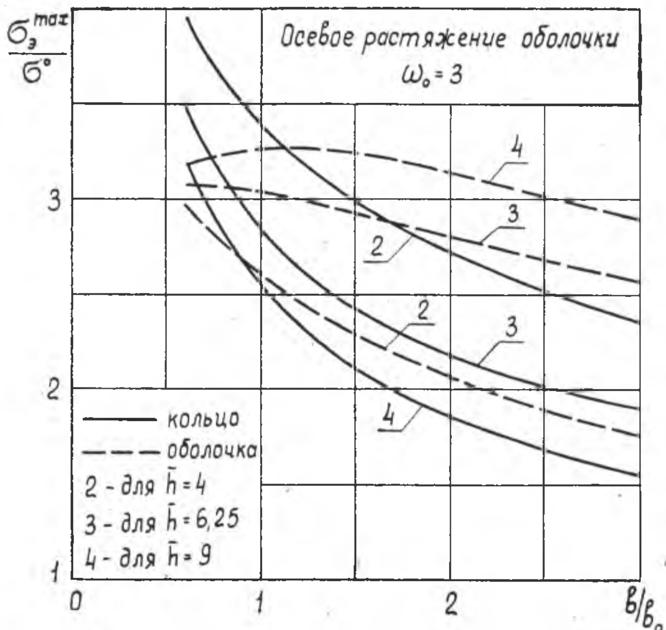
Из приведенных графиков видно, что с увеличением $\bar{b}$ напряжения в кольце существенно падают. Падают, как правило, и на-


$\frac{\sigma_э^{max}}{\sigma^0}$
Осевое растяжение оболочки
$\omega_0 = 1$
— кольцо
– – – оболочка
1 - для $\bar{h} = 2,25$
2 - для $\bar{h} = 4$
3 - для $\bar{h} = 6,25$
4 - для $\bar{h} = 9$
0
1
2
$b/b_0$

Фиг. 4.

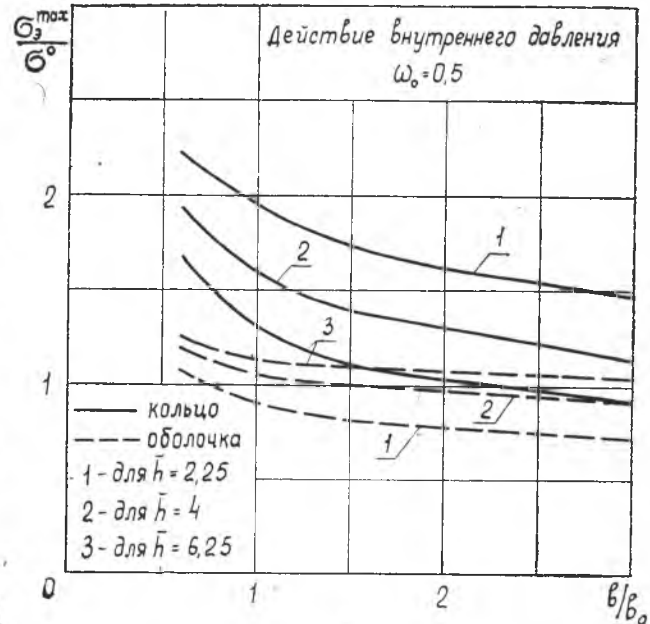

$\frac{\sigma_э^{max}}{\sigma^0}$
Осевое растяжение оболочки
$\omega_0 = 2$
— кольцо
– – – оболочка
2 - для $\bar{h} = 4$
3 - для $\bar{h} = 6,25$
4 - для $\bar{h} = 9$
1
2
3
0
1
2
$b/b_0$

Фиг. 5.



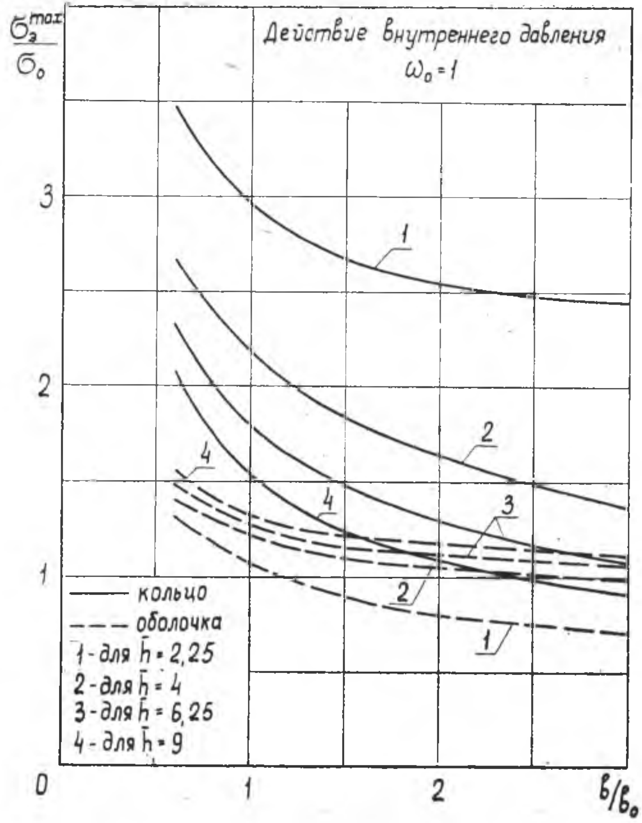
$\sigma_э^{max}/\sigma^\circ$
Осевое растяжение оболочки
$\omega_o = 3$
кольцо
оболочка
2 - для $\bar{h} = 4$
3 - для $\bar{h} = 6,25$
4 - для $\bar{h} = 9$
$в/в_o$


Фиг. 6.

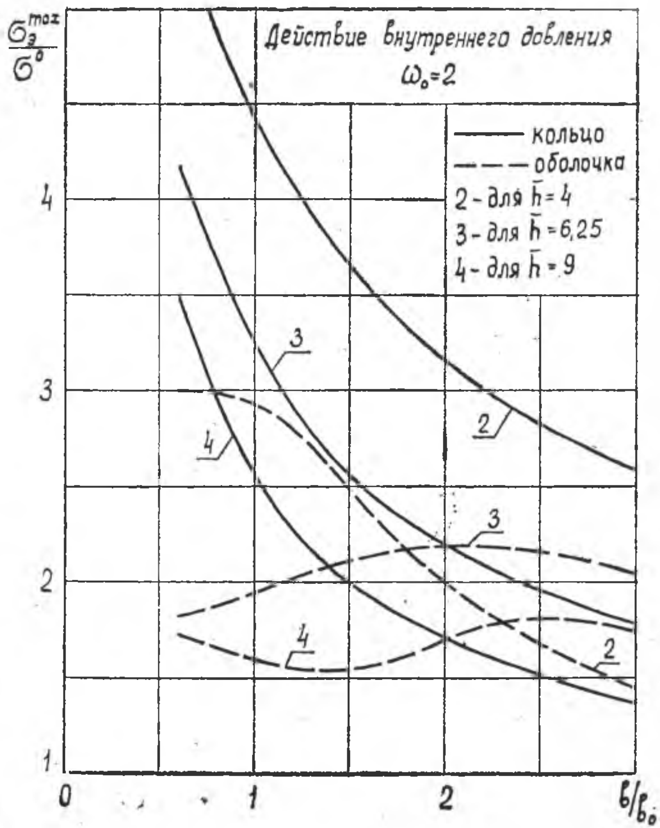


$\sigma_э^{max}/\sigma^\circ$
Действие внутреннего давления
$\omega_o = 0,5$
кольцо
оболочка
1 - для $\bar{h} = 2,25$
2 - для $\bar{h} = 4$
3 - для $\bar{h} = 6,25$
$в/в_o$

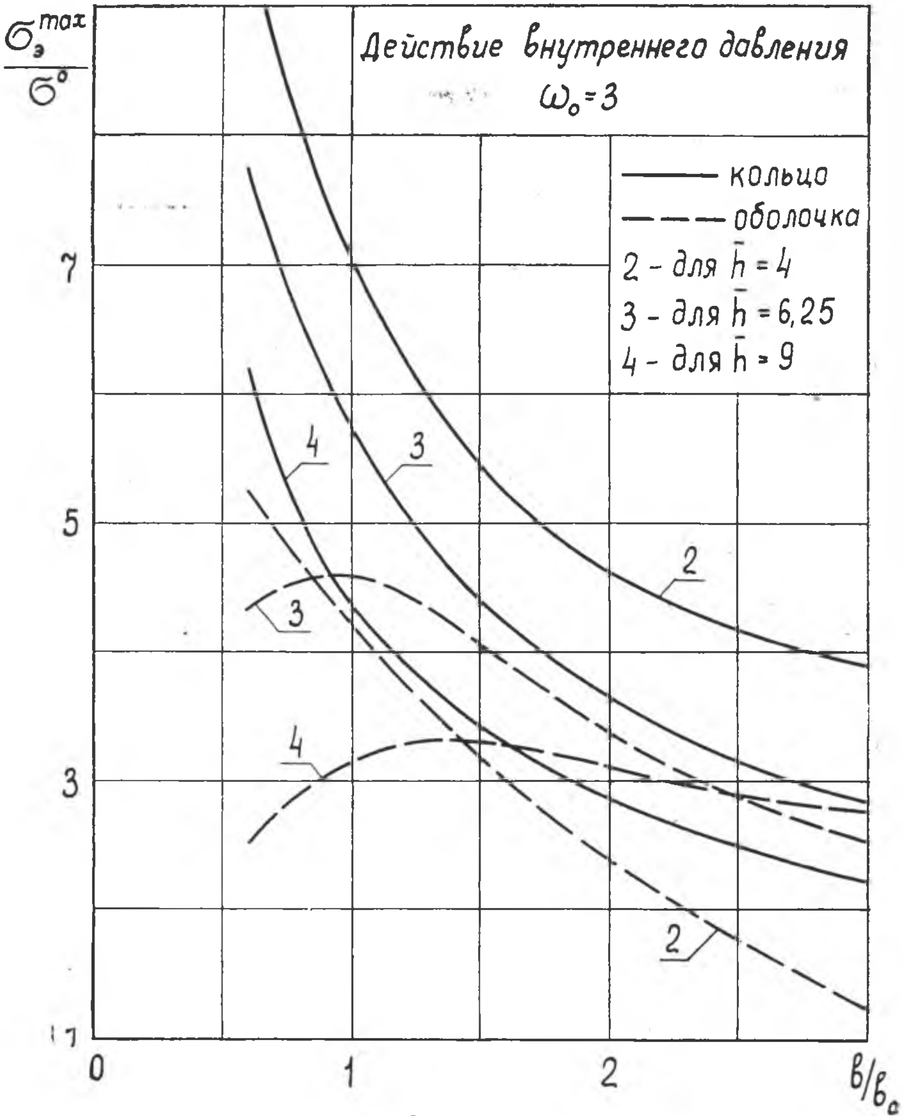

Фиг. 7.


Действие внутреннего давления
$\omega_0=1$
$\frac{\sigma_э^{max}}{\sigma_0}$
кольцо
оболочка
1 - для $\bar{h}=2{,}25$
2 - для $\bar{h}=4$
3 - для $\bar{h}=6{,}25$
4 - для $\bar{h}=9$
$b/b_0$

Фиг. 8.


Действие внутреннего давления
$\omega_0=2$
$\frac{\sigma_э^{max}}{\sigma^0}$
кольцо
оболочка
2 - для $\bar{h}=4$
3 - для $\bar{h}=6{,}25$
4 - для $\bar{h}=9$
$b/b_0$

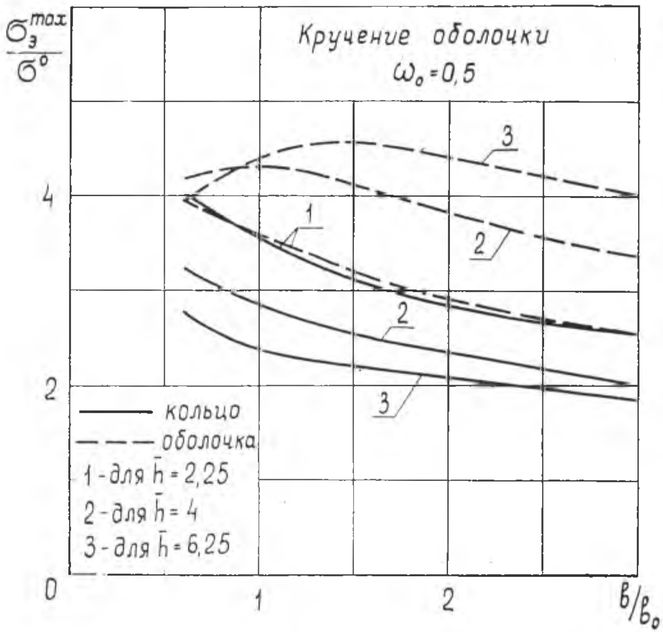
Фиг. 9.




*Фиг. 10.*

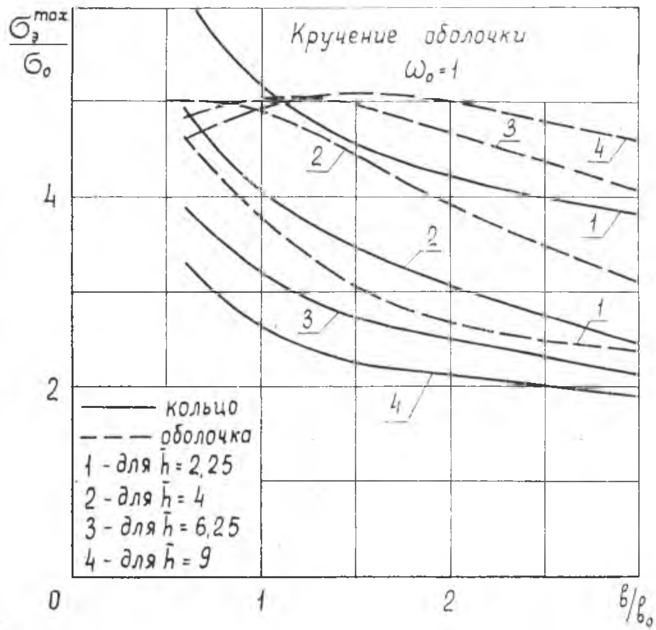
пряжения в оболочке, но при небольших $\bar{b}$ иногда наблюдается некоторый рост.

С увеличением $\omega_0$ коэффициент концентрации напряжений как для оболочки, так и для кольца существенно растет, особенно при кручении и действии внутреннего давления. Это наглядно видно



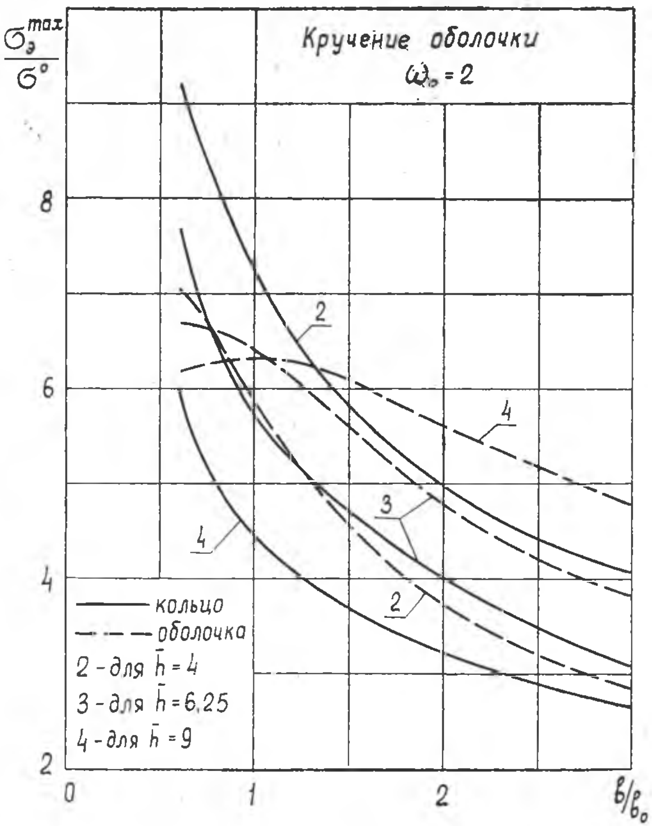
$\frac{\sigma_э^{max}}{\sigma^0}$
Кручение оболочки
$\omega_0 = 0,5$
кольцо
оболочка
1 - для $\bar{h}$ = 2,25
2 - для $\bar{h}$ = 4
3 - для $\bar{h}$ = 6,25
$в/в_0$


*Фиг. 11.*

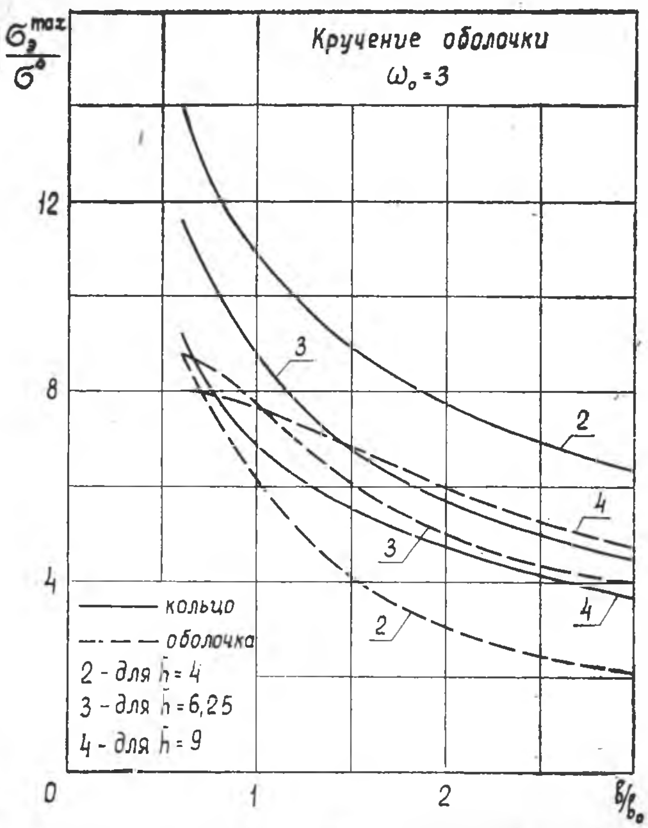


$\frac{\sigma_э^{max}}{\sigma_0}$
Кручение оболочки
$\omega_0 = 1$
кольцо
оболочка
1 - для $\bar{h}$ = 2,25
2 - для $\bar{h}$ = 4
3 - для $\bar{h}$ = 6,25
4 - для $\bar{h}$ = 9
$в/в_0$

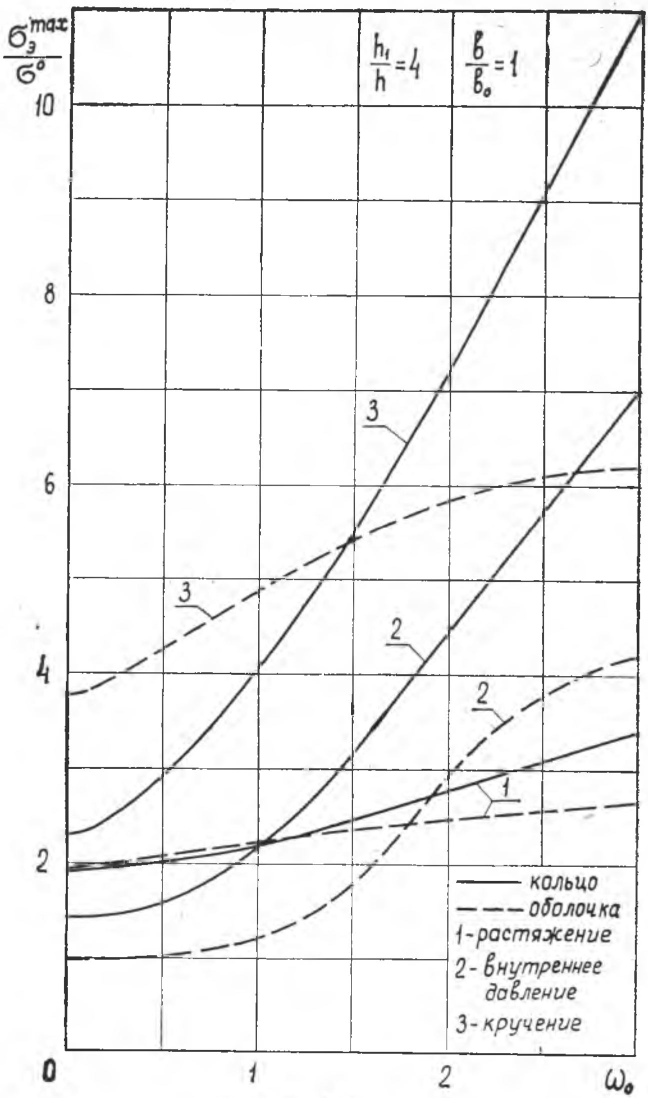

*Фиг. 12.*


Кручение оболочки
ω₀ = 2
σэmax/σ°
8
6
4
2
0
1
2
в/в₀
2
3
4
кольцо
оболочка
2 - для h̄ = 4
3 - для h̄ = 6,25
4 - для h̄ = 9

Фиг. 13.


Кручение оболочки
ω₀ = 3
σэmax/σ°
12
8
4
0
1
2
в/в₀
2
3
4
кольцо
оболочка
2 - для h̄ = 4
3 - для h̄ = 6,25
4 - для h̄ = 9

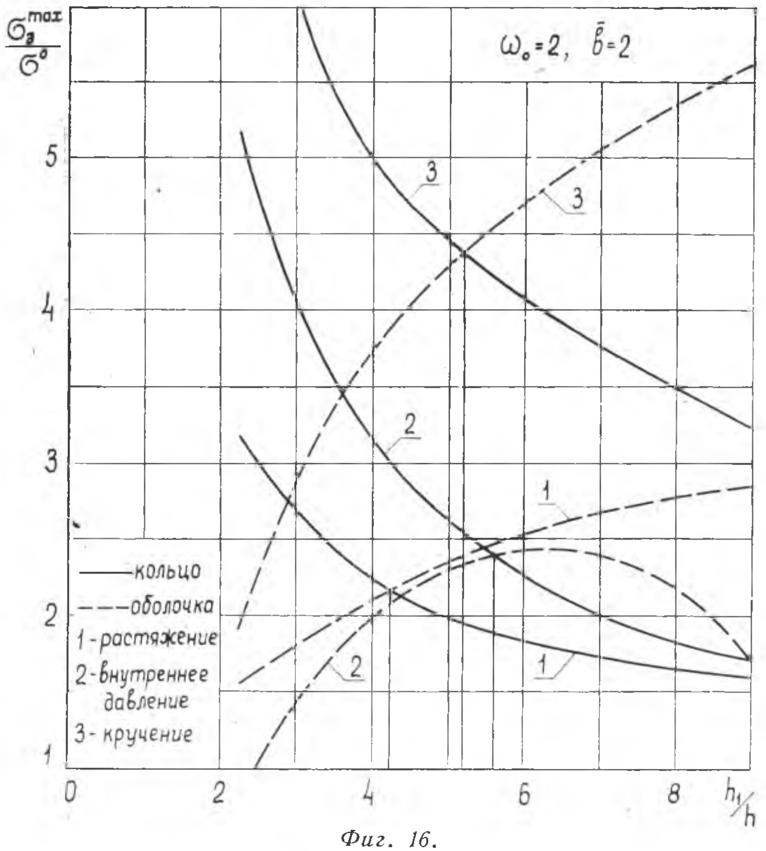
Фиг. 1




*Фиг. 15.*

из фиг. 15, построенной для $\bar{h}=4$ и $\bar{b}=1$. Точки для $\omega_0=0$ (плоская пластина) получены здесь с использованием формул работы [9], в которых отношение модулей упругости материалов заменялось отношением толщины кольца и пластины.

Приведенные на фиг. 3—14 результаты показывают, что увеличение относительной толщины кольца $\bar{h}$ при фиксированной площади его сечения ($\bar{b} = \text{const}$) снижает напряжения в кольце, но может привести к заметному повышению напряжений в оболочке. В качестве примера на фиг. 16 показано изменение $\sigma_э^{max}$ в оболочке и в кольце в зависимости от $\bar{h}$ при $\omega_0 = 2$ и $\bar{b} = 2$. Для случая осевого растяжения наиболее выгодной оказывается здесь




*Фиг. 16.*

относительная толщина $\bar{h} = 4{,}25$, при которой наблюдается равенство максимальных эквивалентных напряжений в оболочке и в кольце. По сравнению с неокантованным отверстием радиуса $R_0$ коэффициент концентрации напряжений снижается при этом в 3,45 раза*. Значение $\bar{h} = 5{,}6$ обеспечивает равнопрочность кольца и оболочки при нагружении внутренним давлением, а $\bar{h} = 5{,}2$— при кручении оболочки. По сравнению с неокантованным вырезом

* Значения коэффициентов концентрации напряжений для оболочки с неокантованным отверстием взяты из работы [14].

здесь имеет место снижение коэффициента концентрации напряжений соответственно в 4,85 раза и в 5,95 раза.

Таким образом, приведенные в настоящей статье результаты исследований позволяют оценить эффективность подкреплений круговых вырезов в цилиндрических оболочках, позволяют выбрать оптимальные с точки зрения веса и равнопрочности подкрепления и могут быть использованы в инженерной практике.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, А. С. Ракин. Исследование упруго-пластического деформирования оболочек с вырезами и усилениями методом фотоупругих покрытий. Прикладная механика, т. II, вып. 3, Киев, 1966.

2. Ван-Дейк. Напряжения в цилиндрической оболочке с абсолютно жестким включением. Ракетная техника и космонавтика. AJAA, русский перевод, т. 5, № 1, 1967.

3. Lekkerkerker J. G. On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole. Uitgeverij Waltman, Delft, 1965.

4. А. И. Лурье. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра. ПММ, т. 10, вып. 3, 1946.

5. А. И. Лурье. Статика тонкостенных оболочек. Гостехиздат, 1947.

6. И. М. Пирогов. Концентрация напряжений в области жесткого кольца на поверхность кругового цилиндра. Сб. статей Всесоюзного заочного политехнического института, в. 16, Москва, 1957.

7. И. М. Пирогов. Концентрация напряжений в области подкрепленного отверстия на поверхности цилиндрической оболочки. Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», № 3, 1960.

8. И. М. Пирогов. Напряженное состояние в цилиндрической оболочке с подкрепленным отверстием, Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», № 6, 1960.

9. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Гос. издат. технико-теор. лит., Москва — Ленинград, 1951.

10. Г. Н. Савин, А. Н. Гузь. К вопросу о концентрации напряжений около отверстий в цилиндрической оболочке. Доповіді АН УРСР, № 11, 1964.

11. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. «Наукова думка», Киев, 1964.

12. Н. П. Флейшман. Влияние подкрепляющего кольца на напряжения в цилиндрической оболочке с круговым отверстием. Доповіді АН УРСР, № 10, 1960.

13. Х. С. Хазанов. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. XXIX, 1967.

14. Х. С. Хазанов, Концентрация напряжений в цилиндрической оболочке с круговым вырезом. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. XXXVI, 1968.

15. Ю. А. Шевляков. Концентрация напряжений в цилиндрической оболочке с круговым отверстием на боковой поверхности. Доповіді АН УСРС, № 2, 1955.